Iteration nichtlinearer Gauß-Filter

in der

Bildverarbeitung

Inaugural–Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Jörg Weule, geb. Sievert

aus

Detmold

Düsseldorf
1994

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.

Referent: Prof. Dr. Aurich
Korreferent: Prof. Dr. Speckenmeyer
Tag der mündlichen Prüfung: 9.12.1994

Mein Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Volker Aurich für die Themenstellung, die stete Gesprächsbereitschaft und die kritische Durchsicht einer ersten Fassung dieser Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei Carola Scheel und Uwe Daub für das Lesen und Kommentieren einer vorläufigen Version dieser Arbeit bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Maschinelles Sehen (*engl.: computer vision*), ein Teilgebiet der Bildverarbeitung (*engl.: image processing*), behandelt Fragestellungen, die für die Analyse von Bildern wichtig sind.

Eine Kamera führt mit Hilfe eines Objektives eine Zentralprojektion aus einem Ausschnitt ihrer Umgebung auf die Bildebene durch. Bei einer idealen Zentralprojektion ist die Bildebene nicht begrenzt, d.h. ein Bild kann als Funktion von $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt werden. Betrachtet man nur die Helligkeit auf der Bildebene, so faßt man ein Bild als Funktion $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf. Die Bildanalyse geht der Frage nach, welche Informationen aus einem Bild gewonnen werden können. Die Erkennung von Gegenständen kann dabei als Zuordnung von Bildinformationen zu Modellen der Gegenstände in einer Datenbank erfolgen, je nach Anwendung sind aber auch andere Fragestellungen denkbar.

Um die Bilddaten für die Bildanalyse aufzubereiten, werden die Bilder im ersten Verarbeitungsschritt zunächst gefiltert. Aus Experimenten mit Filtern für diesen ersten Verarbeitungsschritt ist eine neue Filtermethode entstanden, welche in dieser Arbeit vorgestellt und untersucht wird. Die Experimente wurden mit einem neuen Filter durchgeführt, welches in dieser Arbeit aufgrund seiner Konstruktion *nichtlineares Gauß-Filter* genannt wird. Bei diesen Tests hat es sich als sehr günstig erwiesen, die Filterung einige Male zu iterieren. Es wurde sowohl mit der Anzahl der Filterungen, als auch mit den Parametern der einzelnen Filterungen experimentiert, wobei die Kontrolle der Ergebnisse durch Betrachten am Bildschirm vorgenommen wurde. Diese Experimente führten auf die *Gauß-Filterkette*, welche innerhalb dieser Experimente subjektiv die besten Ergebnisse lieferte. Die Gauß-Filterkette ist eine neue Art, ein nichtlineares Filter mehrfach anzuwenden. Mit Hilfe der Untersuchungen des nichtlinearen Gauß-Filters wird klar, warum die Gauß-Filterkette auch gegenüber anderen Filtern sehr gute Filterergebnisse liefert. Durch die Konstruktion des Filters werden Probleme anderer Filter umgangen, so daß die Resultate anderer Filter in speziellen Situationen übertroffen werden. Aufgrund der Konstruktion kann das Filter auch auf sehr viel allgemeinere Situationen übertragen werden.

In Kapitel 1 wird eine Einführung gegeben und die Aufgabenstellung präzisiert. In Kapitel 2 wird die Problematik der linearen Filter diskutiert. Zusätzlich wird in Kapitel 2 auf Ergebnisse anderer Arbeiten hingewiesen, durch welche die Gauß-Funktion in der Bildverarbeitung eine besondere Rolle spielt. Ausgehend vom linearen Gauß-Filter wird dann in Kapitel 3 das nichtlineare Gauß-Filter eingeführt. Die Eigenschaften dieses Filters werden in Kapitel 4 dargestellt. Anhand der Eigenschaften des nichtlinearen Gauß-Filters wird in Kapitel 5 deutlich, warum gerade die Gauß-Filterkette in den Experimenten die besten Ergebnisse geliefert hat. Es wird gezeigt, wie die Parameter der Gauß-Filterkette zu wählen sind. Um die Wirkung der Gauß-Filterkette zu demonstrieren, schließt sich ein Kapitel mit Beispielen an, in denen auch Bilder verwendet werden, welche mit einer CCD-Kamera aufgenommen wurden. In Kapitel 7 wird die Gauß-Filterkette mit anderen Filtern verglichen.

Da die Kanteninformation für einige Anwendungen eine wichtige Rolle spielt, wird in Kapitel 8 gezeigt, wie man mit einem ähnlich aufgebauten nichtlinearen Filter Kanten erkennen kann. Bemerkungen zu möglichen Verbesserungen und Hinweise zur Implementation sind in Kapitel 9 zusammengefaßt. Eine Zusammenfassung schließt diese Arbeit ab.

1.1 Modelle für Bilder und Bezeichnungen

Da die Bildanalyse mit Hilfe von Rechnern durchgeführt werden soll, muß das Bild in eine Form umgewandelt werden, welche vom Rechner verarbeitet werden kann. Der Information des Bildes wird hierzu eine Darstellung mit endlich vielen Zahlen zugeordnet. In dieser Arbeit gibt jede Zahl dieser Zuordnung die Helligkeit des Bildes in einem Bildpunkt an. Die Lage der Bildpunkte im Bild stimmt mit den Gitterpunkten eines regulären Gitters überein. Die Bildpunkte heißen *Pixel* (*von engl.: picture element*) und die Werte des Bildes in diesen Pixeln heißen *Grauwerte*.

Die Umwandlung von der Helligkeit in einem Bildpunkt zu einem Zahlenwert wird dabei als monoton wachsende Funktion realisiert, die Werte sind aus technischen Gründen in der Regel ganze Zahlen zwischen 0 und 255. Durch Regler an den Geräten kann die Umwandlung der Beleuchtung und der am Objektiv eingestellten Blende angepaßt werden. Da der Abbildungsmaßstab des Bildes für die weiteren Betrachtungen ohne Belang ist, werden wir die Menge der Pixel als Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ auffassen.

Ist $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$, so heißt $I_{|\mathbb{Z}^2}$ *Abtastung* von I auf $\mathbb{Z}^2$. Ist $\vartheta\colon \mathbb{R} \to [\![0, 255]\!]$ eine schwach monoton wachsenden Funktion, so heißt $\vartheta \circ I\colon \mathbb{R}^2 \to [\![0, 255]\!]$ *Quantisierung* von I, wobei für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $[\![a, b]\!]$ die Menge der ganzen Zahlen im Intervall $[a, b]$ bezeichnet wird.

Die Menge der Pixel wird im folgenden mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Besteht ein Bild aus N_y Zeilen mit jeweils N_x Pixel, so wird die Menge der Pixel mit $[\![0, N_x - 1]\!] \times [\![0, N_y - 1]\!]$ identifiziert. Mit $\mathcal{V} := [\![0, 255]\!]$ wird die Menge der Pixelwerte bezeichnet. Ist I die Helligkeitsverteilung der Bildebene, so ist die Funktion $I_q := \vartheta \circ h_{|\mathcal{P}}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{V}$ die Abbildung, welche mit Hilfe des Computers und den angeschlossenen Geräten zur Bildaufnahme erfaßt werden soll.

1.2 Rauschen, Rekonstruktion von digitalen Bildern

Mit Hilfe der Kamera wird nun eine Funktion $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{V}$ ermittelt, welche möglichst mit der Abbildung I_q übereinstimmt (Bildaufnahme). Die Abbildung f wird auch digitales Bild genannt. Die Differenz $R\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ von I zum tatsächlich realisierten digitalen Bild f gibt an, welche Fehler bei der Bildaufnahme gemacht wurden:

$$f(p) = I(p) + R(p) \;\; \forall p \in \mathcal{P} \tag{1}$$

Man spricht in diesem Fall vom *Rauschen* R des Bildes f. Macht man von einer Szene mehrere Aufnahmen, so werden die Grauwerte der Pixel nicht unbedingt übereinstimmen.

Die Werte $R(p)$ können also auch als Realisierungen von Zufallsvariablen Z_p aufgefaßt werden, welche durch die verwendete Technik beschränkt sind. Da die Eigenschaften des Rauschens in der Regel nicht bekannt sind und diese sich auch von Bild zu Bild ändern können, versucht man in der Bildverarbeitung Techniken zu entwickeln, welche auch ohne Vorwissen bezüglich des Rauschens gute Ergebnisse liefern.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird das Verfahren der Bildaufnahme nicht weiter betrachtet. Die entwickelten Techniken sind daher auch auf Bilder anwendbar, welche mit anderen Verfahren aufgenommen wurden. Den Verfahren der Bildaufnahme ist gemeinsam, daß sich die Grauwerte mehrerer Aufnahmen des gleichen Bildes leicht unterscheiden. Als Modell für die Bilddaten wird im weiteren nur noch verwendet, daß sich das Bild wie oben beschrieben in einen Helligkeitsanteil und Rauschen zerlegen läßt.

Eine der wichtigen Fragestellungen der Bildverarbeitung ist nun, ob man unter gewissen Annahmen das unverfälschte Bild $I_{|\mathcal{P}}$ aus *einem* aufgenommenem Bild f gewinnen kann. Eine solche Annahme könnte sein, daß das Bild nur aus wenigen Flächen mit jeweils einer einheitlicher Helligkeit besteht. Diese Annahme ist natürlich nur in wenigen Fällen realistisch. Betrachtet man die Bildaufnahme als Zufallsexperiment, so ergibt sich die Fragestellung, ob es einen Schätzer gibt, welcher ausgehend von f unter gewissen Annahmen die Funktionswerte $I(p)$ schätzen kann. Man spricht von der *Rekonstruktion* von Bildern (*engl.: visual reconstruction*). Um einen Schätzer zu konstruieren wird man Annahmen machen, welche nicht überall im Bild erfüllt sind. Da für die Analyse des Bildes oft kleine Details des Bildes unwichtig sind, ist ein Schätzer auch dann für die Bildverarbeitung geeignet, wenn er kleine Details verfälscht wiedergibt oder sogar aus dem Bild entfernt. Für die weitere Analyse der Bilder kann es sogar nützlich sein, daß kleine Details aus den Bildern entfernt werden, dies hängt aber vom Anwendungsgebiet der Bildverarbeitung ab.

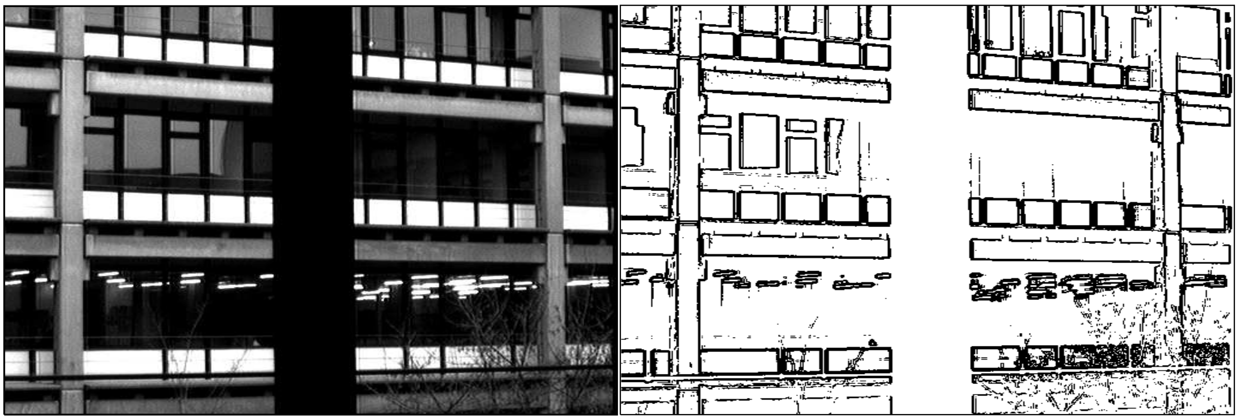
Die Abbildungen der Menge $Abb(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ in sich werden *Filter* genannt und mit großen Buchstaben bezeichnet, synonym wird die Bezeichnung *Operator* verwendet. Das nichtlineare Gauß-Filter ist in diesem Sinne ein Operator zur Bildrekonstruktion. In Kapitel 4 wird gezeigt, daß dieses Filter als robuster Schätzer aufgefaßt werden kann.

1.3 Kanten in Bildern

Die Vorstellungen, welche man mit dem Begriff Kante verbindet, sind vielfältig. Zur Untersuchung von Bildern ist es sinnvoll, ein Modell für eine Kante zur Verfügung zu stellen.

Eine *Kante* in einem Bild ist eine starke Helligkeitsänderung zwischen Bereichen von Pixeln ungefähr gleicher Helligkeit. Enthält das Bild Rauschen, so kann man Kanten als Grenze zwischen Bereichen mit ähnlichen Helligkeiten auffassen. Für das Bild in Abbildung 1 sind die Kanten mit einem Programm zur Kantenerkennung berechnet worden.

Ausgehend vom rekonstruierten Bild wird in Kapitel 8 ein Filter vorgestellt, welches Kanten in einem Bild markiert. Anschließend kann mit großer Genauigkeit an diesen Stellen die Richtung der Kante detektiert werden. Die eingesetzten Methoden zur Bildrekonstruktion



Beispiel eines Kantenbildes (rechts) anhand einer Aufnahme eines Institutsgebäudes der Heinrich-Heine Universität mit einer Säule im Gegenlicht (links)

Abbildung 1: Ausgabe eines Kantendetektors

und zur Kantenerkennung sind miteinander verwandt.

1.4 Spezielle Bilder

Um die Wirkung eines Filters zu studieren, untersucht man seine Wirkung am besten zunächst auf Bildern, welche nicht zuviele Strukturen enthalten. An dieser Stelle geben wir einigen Bildern spezielle Namen. In Abbildung 2 wird das Bild immer zusammen mit seinem Profil der Zeilen (jeweils im rechten Bild) gezeigt.

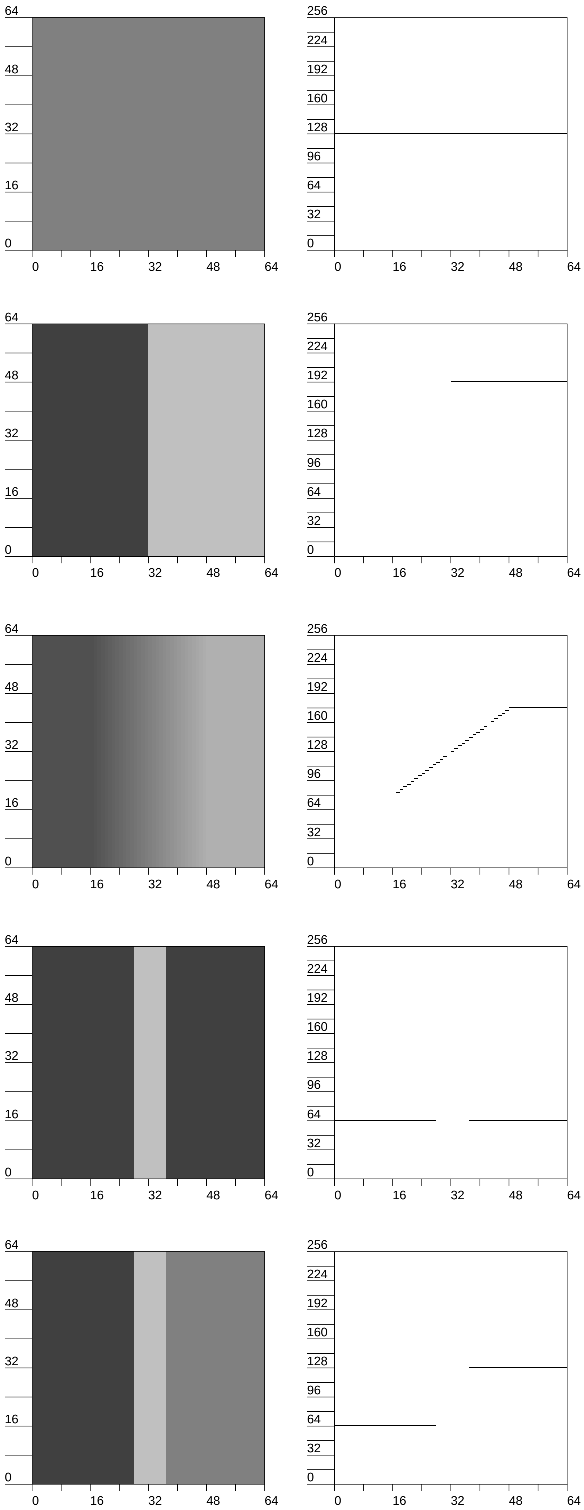
Das einfachste Bild, welches gefiltert werden kann, ist eine *Fläche*. Dieses Bild ist wegen seiner Einfachheit für theoretische Untersuchungen interessant.

Als Modell für eine *Kante* mit *Kantenhöhe* 128 dient das oberste Bild in Abbildung 2. Die Kantenhöhe wird auch als *Sprunghöhe* bezeichnet.

Die einzelnen Stufen in rechten Bild der *Rampe* geben die Grauwerte der einzelnen Spalten an. Da das Bild nur 64 Spalten enthält, sind diese hier deutlich zu sehen. Die Differenz der Grauwerte benachbarter Stufen der Rampe ist 3.

In Bildern kommen oft dünne Linien vor. In realen Bildern können das z.B. Tischbeine oder ähnliches sein. Als Modell für diese Linien dient ein Bild mit einem *Streifen*. Der Abstand der Kanten des Streifens wird als Breite bezeichnet, die Höhe ist auch hier die Differenz der Grauwerte. Ein *Linienmuster* ist ein Bild mit mehreren parallelen Linien.

Der Name *Doppelkante* wurde gewählt, da die Kanten verschiedene Höhe haben. Dieses Bild unterscheidet sich somit von dem, mit dem Streifen. Die Breite bezeichnet auch hier den Abstand zwischen den einzelnen Kanten.



Fläche mit Grauwert 128

Kante mit Sprunghöhe 128

Rampe

Streifen

Doppelkante

Abbildung 2: einige Standardbilder bzw. Muster

2 Probleme der linearen Filter

2.1 Bildrekonstruktion mit linearen Filtern

Es sei $f\colon \mathcal{P} \to I\!R$ ein Bild, welches aus dem Rauschen R und der Intensitätsfunktion I besteht:

$$f = I + R$$

Mit $\mathcal{U}(p)$ werde hier die Menge der 8 direkten Nachbarpixel von p zusammen mit dem Pixel p selber bezeichnet. Ist I auf der Menge $\mathcal{U}(p)$ für ein Pixel p konstant und sind die Fehler $R(q)$ aller Pixel $q \in \mathcal{P}$ unabhängig normalverteilt, so ist das arithmetische Mittel der Werte von f auf $\mathcal{U}(p)$ ein erwartungstreuer Schätzer[1] für $I(p)$. Da das Pixel p in der Mitte der Summanden der Mittelung liegt, nenne ich dieses Pixel das *zentrale Pixel* der Summe. Die Annahme, daß die Funktion I auf $\mathcal{U}(p)$ konstant ist, ist für viele Pixel p im Bild falsch. Da man nun nicht mehr Daten als das Bild zur Verfügung hat, ist es sinnvoll, die Mittelung beizubehalten, jedoch die Nachbarpixel weniger stark zu gewichten. Die folgende Tabelle enthält eine solche Gewichtung, bei der das Gewicht der Nachbarpixel nur ein halb bzw. ein viertel des Gewichtes des zentralen Pixels beträgt.

$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Diese Tabelle wird *Filtermaske* genannt und kann als Beschreibung der Funktionswerte einer Funktion $g\colon [\![-1,1]\!]^2 \to I\!R$ verstanden werden, so daß die Filterung des Bildes für $\mathcal{P} = [\![0, N_x - 1]\!] \times [\![0, N_y - 1]\!]$ einer Faltung ähnelt:

$$[G_g f](p) = \sum_{q \in U(p)} g(p-q) f(q) \quad \forall p \in [\![1, N_x - 2]\!] \times [\![1, N_y - 2]\!] \subset \mathcal{P}$$

Das gefilterte Bild enthält also keine Werte für die Randpixel. Ist die Filtermaske größer als 3×3 Pixel, so wird das gefilterte Bild entsprechend kleiner.

Es gibt einige Adhoc-Ansätze um auch für die Pixel an den Rändern und in den Ecken von $\mathcal{P}$ Grauwerte auszurechnen. Zunächst fällt einem das Abschneiden der Filtermaske bei gleichzeitiger Anpassung der Gewichte ein. Man kann das Bild auch als eine Periode einer periodischen Funktion auffassen. Dies bietet sich dann an, wenn auch eine schnelle Fourier-Tranformation für das Bild durchgeführt werden soll. Die Zeilen des Bildes stehen hintereinander im Speicher. Hat man die Berechnung der Filterung auf diese Art der Speicherung angepaßt, so kann man aus Rechenzeitgründen auf die Behandlung des linken und

[1] Definition [BS79, 5.2.2.1]: Eine Schätzung heißt erwartungstreu, wenn ihr Erwartungswert gleich dem zu schätzenden Parameter ist.

rechten Randes verzichten. Auf Pipeline-Architekturen kann dies der einzig praktikabele Weg sein, die Filterung zu berechnen. Je nach Berechnungsvorschrift für die Randpixel und Anwendung wird man die Werte der Randpixel in weiteren Verarbeitungsschritten verwenden oder ignorieren.

Filter dieser Art sind lineare Abbildungen und heißen daher *lineare* Filter. Da man die Vorstellung hat, daß das Bild Gf, welches nicht so große Unterschiede in benachbarten Grauwerten aufweist, glatter aussieht, nennt man das lineare Filter oben auch *Glättungsfilter*. Ein *lineares Glättungsfilter* ist ein lineares Filter, dessen Gewichte von der Mitte zu den Rändern der Tabelle kleiner werden, nicht negativ sind und sich zu 1 summieren.

Wird die Gewichtsfunktion $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Gauß-Funktion erzeugt, so heißt das Filter (*lineares*) *Gauß-Filter*. Die Gewichtsfunktion des Gauß-Filters g_σ ist das Produkt zweier Gauß-Funktionen mit dem Parameter σ, jeweils bzgl. einer Komponente des Argumentes:

$$g_\sigma(p) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\| p \|_2}{\sigma}\right)^2\right)$$

Da die Summe der Werte der Abtastung der Gauß-Funktion sich nicht zu Eins summieren, müssen die Gewichte des Filters entsprechend skaliert werden. Die Werte der Gauß-Funktion werden mit der Länge von p schnell sehr klein. Man verwendet daher in vielen Fällen eine Approximation der Gauß-Funktion mit kompaktem Träger, so daß die Summen nur noch wenige Summanden enthalten. Für ein Bild $f : [\![0, N_x - 1]\!] \times [\![0, N_y - 1]\!] \to \mathbb{R}$ und einen quadratischen Träger $[\![-i, i]\!]^2$ der Approximation von g_σ erhält man für alle $p \in [\![i, N_x - i - 1]\!] \times [\![i, N_y - i - 1]\!]$:

$$[G_\sigma f](p) \quad = \quad \frac{1}{\sum_{q\in[\![-i,i]\!]^2} g_\sigma(q)} \sum_{q\in[\![-i,i]\!]^2} g_\sigma(q) f(p-q)$$

Die Verwendung der Gauß-Funktion bei der Bildung des nichtlinearen Gauß-Filters wurde unter anderem durch die nun folgenden Eigenschaften des linearen Gauß-Filters motiviert.

Sind die Beträge der Filterfunktion summierbar, so ordnet die Fourier-Transformation diesem Filter eine *Übertragungsfunktion* zu, welche in [Jar90, S. 86] *diskrete Frequenzcharakteristik* genannt wird. Marr und Hildreth vertreten in [MH80] die Ansicht, daß die Varianz der Gewichtsfunktion, wie auch die der Übertragungsfunktion, möglichst klein sein soll und daher das Gauß-Filter ein optimales lineares Glättungsfilter ist, da es das Produkt dieser beiden Varianzen minimiert. In [TP86] werden von V. Torre und Tomaso A. Poggio verschiedene lineare Filter zur Glättung diskutiert, welche eine Übertragungsfunktion mit kompaktem Träger haben, also auch als Tiefpaß wirken. Mit geeigneten Parametern lassen sich diese Filter durch lineare Gauß-Filter approximieren.

Stellt man sich das Bild als zweimal differenzierbare Funktion $f(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vor, welche eine zeitabhängige Wärmeverteilung $u(x, y; t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt, so ist $g_\sigma * f$

die Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad u(x, y; 0) = f(x, y)$$

zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}\sigma^2$, vgl. [TP86]. Eine ausführliche Behandlung der Wärmeleitungsgleichung findet man z.B. im Buch *Höhere Analysis* von Hans Triebel [Tri80] (Satz 14.4 und Satz 13.3). Die Differentialgleichung gibt zum einen eine Interpretation des diskreten Gauß-Filters. Zum anderen läßt sie sich zur Konstruktion nichtlinearer Filter nutzen, indem die Gleichung in der Form

$$div\ (grad\ u(x, y; t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y; t)$$

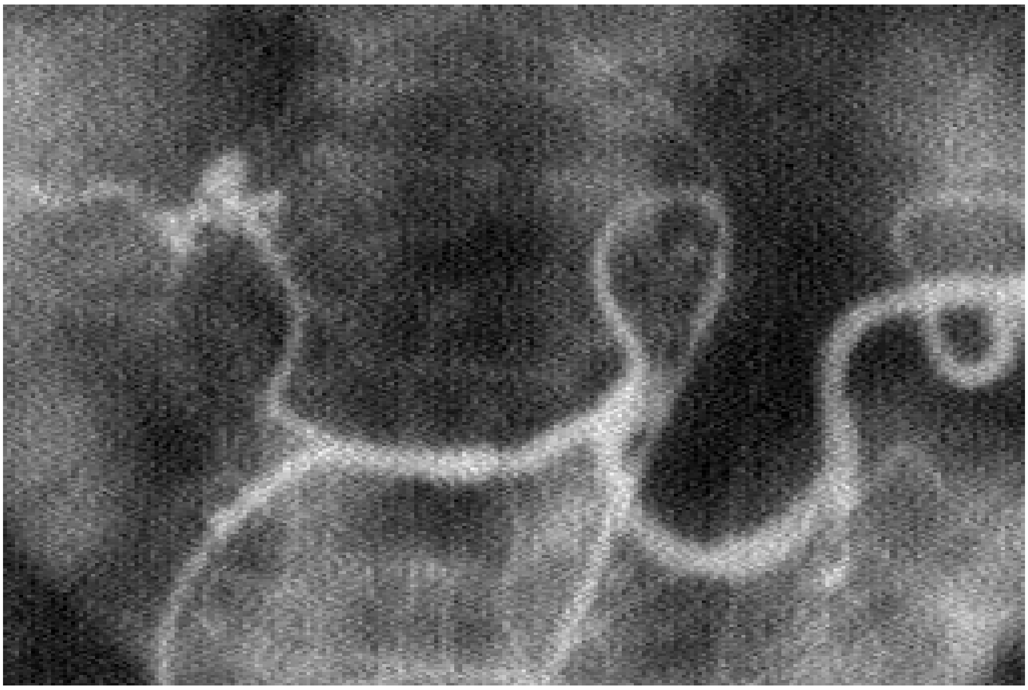
geschrieben wird (*div* und *grad* wirken hier nur auf die Variablen x und y). Durch Begrenzung der Länge der Gradienten $grad\ u(x, y; t)$ mit einer geeigneten Funktion bleiben die Kanten im Bild besser erhalten, es wird sozusagen der Wärmefluß an Kanten vermindert, vgl. [PM90a, WP93]. Die Implementation der Idee muß nun berücksichtigen, daß ein Bild nur auf $\mathbb{Z}^2$ lebt, wo keine Ableitungen existieren. Was bei der Berechnung der Differenzenquotienten zu beachten ist, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

2.2 Das Problem der Kantendetektion

In der Literatur ist vielfach die Bedeutung der Kantendetektion für die Bildverarbeitung hervorgehoben worden, so auch in [BZ87, PK91, SB91, Can86, BCM$^+$88]. Da die Grauwerte des Bildes von der Beleuchtung abhängen, wird in der Bildanalyse häufig die Kanteninformation ausgewertet, sei es um Objekte zu erkennen oder in einer Sequenz von Bildern zu verfolgen. Viele Objekte lassen sich anhand ihrer Kontur erkennen, welche dazu vollständig gefunden werden sollte. Ausgehend von den Kanten und der Kontur kann eine symbolische Beschreibung des Bildes erfolgen. In [KDTN92, SBA85] werden dazu die Objekte im Bild mit Hilfe einer Datenbank klassifiziert. Um die Kontur eines Objektes genau zu bestimmen, müssen aber die Kanten vollständig lokalisiert werden; Fehler in der Kantenerkennung wirken sich hier unmittelbar aus. Mit Hilfe von Stereo-Bildern kann durch Vergleich der Lage von Kanten die Entfernung geschätzt werden.

Die automatische Erkennung von Kanten ist schwieriger, als man zunächst vermutet. Betrachtet man das Bild des Teddybären in Abbildung 3, so ist nicht klar, was als Kante erkannt werden soll. Im Hintergrund des Bären sieht man Flächen, welche einen gut erkennbaren Rand haben. Das Fell des Bären hat aber keinen einheitlichen Grauwert und so kann auch die Frage, was als Kanten gedeutet werden soll, nicht eindeutig entschieden werden. Die Röntgenaufnahme darunter enthält starkes Rauschen. Die Ränder der Adern können als Kanten aufgefaßt werden. Sie sind zum Teil kaum zu erkennen und nicht scharf durch einen Grauwertsprung begrenzt. Hier ist es nicht nur schwierig die Ränder der Adern zu finden, sondern auch zu entscheiden, wo genau die Ränder liegen.

Bild eines Teddybären



Ausschnitt einer Röntgenaufnahme eines Aderngeflechts

Abbildung 3: Beispiele

Für die Ansicht des Institutsgebäudes in Abbildung 1 fällt die Auswahl der Kanten schon leichter, da in diesem Bild deutlich helle und dunkle Flächen zu sehen sind.

Das Kantenbild in Abbildung 4 auf Seite 11 enthält zwei Flächen verschiedener Helligkeit und eine Kante zwischen den Flächen, welche deutlich zu erkennen ist. Unter der Annahme, daß die Kante geradlinig verläuft, könnte man diese sehr präzise lokalisieren. Wenn man dagegen nur die mittleren 8×8 oder 16×16 Pixel betrachtet, so ist die Erkennung der Kante schon schwieriger. In Folge des Rauschens kann man ohne weitere Annahmen über den Verlauf der Kante diese nicht genau lokalisieren. Um die Grauwerte der Pixel besser beurteilen zu können, sind diese in der unteren Zeile der Abbildung 4 als Projektionen dargestellt.

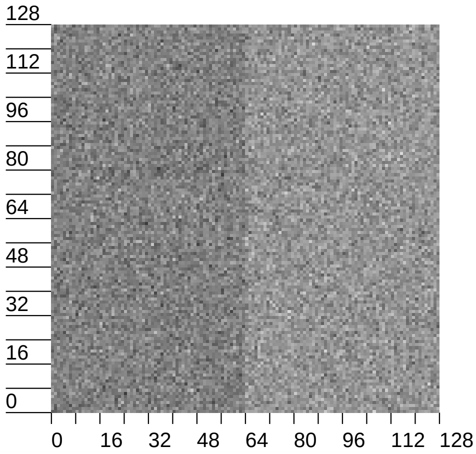
Da das Bild eine Funktion ist, ist der Graph des Bildes eine Teilmenge von $\mathcal{P} \times \mathbb{R}$. Durch die Projektion der Pixel auf die erste Komponente entsteht aus dem Graphen eine Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, welche *Seitenansicht* genannt wird. Mit dem Vorwissen, daß eine Kante senkrecht im Bild enthalten ist, kann der Ort der Kante in der Seitenansicht erkannt werden. Die Punkte sind bezüglich der Größe der Urbildmengen unter der Projektion geschwärzt worden, so daß die Seitenansicht hier eine Übersicht über die Verteilungen der Grauwerte der einzelnen Spalten des Bildes wiedergibt.

In die Entscheidung, ob zwischen zwei Pixeln eine Kante verläuft, muß man also die Pixelwerte in einer Umgebung dieser Pixel mit einbeziehen, die Betrachtung von Differenzen benachbarter Grauwerte (Differenzenquotienten) reicht allein nicht aus. Problematisch ist auch die Erkennung der Richtung von Kanten, insbesondere wenn die Objekte im Bild keine geraden Ränder haben, wie zum Beispiel das Röntgenbild mit den Adern in Abbildung 3.

2.3 Lineare Filter zur Kantendetektion

Um Kanten im Bild zu finden, kann man für eindimensionale Daten nach einer Glättung die Differenzenquotienten bzgl. des Pixelabstandes bestimmen und davon die lokalen Maxima suchen. Ist das Rauschen genügend stark geglättet worden, so stellen diese dann die gefundenen Kanten dar. Die Bildung der Differenzenquotienten ist ein linearer Operator und somit bildet die Glättung mit anschließender Bildung der Differenzenquotienten zusammen wieder ein lineares Filter, welches die Abtastung der partiellen Ableitung der Glättungsfunktion approximiert. Dem Differenzenquotienten ähnliche Bildungen werden in [TP86] diskutiert, die Unterschiede sind gering.

Da Bilder zweidimensional sind, muß man nach einer Glättung für beide Koordinatenrichtungen jeweils den Differenzenquotienten berechnen. Man erhält so für jedes Pixel einen zweidimensionalen Vektor, welcher *Gradient* des geglätteten Bildes genannt wird. Analog zum eindimensionalen Fall kann diese Berechnung auch mit Hilfe von zwei linearen Filtern erfolgen. An einer Kante wird dieser Gradient besonders groß werden und im Idealfall senkrecht zur Kante stehen. Auf Schwierigkeiten bei der Verwendung von Gauß-Filtern mit kleinem Parameter σ wird in [Dav87] hingewiesen.



Zu sehen ist links eine verrauschte Kante, in der mittleren Zeile die mittleren 8×8 Pixel bzw. 16×16 Pixel des Kantenbildes und unten sieht man die Grauwerte einer Zeile und die Seitenansicht des Kantenbildes.
Für die Seitenansicht (rechts unten) sind die relativen Häufigkeiten der Grauwerte in den Spalten als Grauwert dargestellt. Es wird in den Spalten der Seitenansicht die Verteilung der Grauwerte in Spalten des Kantenbildes wiedergegeben.

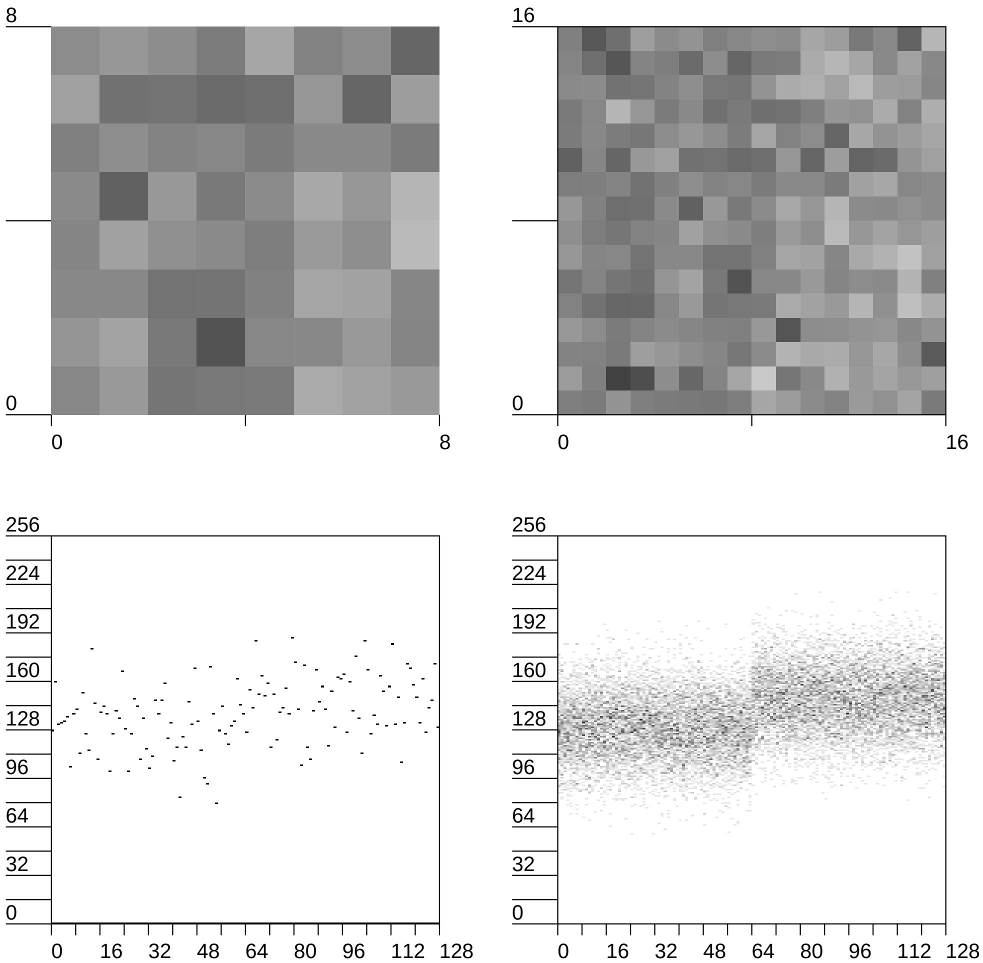


Abbildung 4: Grauwerte eines Kantenbildes

Zur Kantenerkennung wird man also in Richtung des Gradianten lokale Maxima der Gradientenlänge suchen, vgl. [Can83]. Es gibt aber dabei ein Dilemma: Verwendet man zur Kantensuche die partiellen Ableitungen der zweidimensionalen Gauß-Funktion, so treten bei kleinem σ Maxima neben der Kante auf, welche durch das Rauschen hervorgerufen werden. Bei einem großen σ jedoch kann die Kante nicht mehr gut lokalisiert werden. Einerseits kann dann die Stelle des Maximas nicht genau bestimmt werden, andererseits liegt das Maximum nicht unbedingt dort, wo die Kante liegt. Ein Beispiel ist hierfür die Doppelkante aus Abbildung 2, wo bei sehr großem σ nur noch ein lokales Maximum im Filterergebnis enthalten ist. Dieses Dilemma entsteht auch bei anderen ähnlichen linearen Filtern zur Kantenerkennung. In [Can83] wird vorgeschlagen, viele Filter verschiedener Größe zu verwenden, dann mit Hilfe des geschätzten Signal-Rausch-Verhältnisses die Ergebnisse zu bewerten und daraus die Lage der Kanten zu bestimmen.

Für stetige differenzierbare Funktionen könnte die Suche der Maxima wieder mit Hilfe einer weiteren Differentiation und anschließender Nullstellensuche durchgeführt werden. Mit Hilfe des Laplace-Operators erhält man aus einem linearen Glättungsfilter ein Filter, welches an den Kanten Nullstellen liefert. Ist die Filterfunktion eine Abtastung der Gauß-Funktion unter dem Laplace-Operator, so wird es *LoG-Filter* (*Laplace of Gaussian*) genannt. Unter einer Nullstelle versteht man hier benachbarte Pixel mit verschiedenem Vorzeichen. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß nicht für verschiedene Richtungen gefiltert werden muß und die Suche nach den Nullstellen im gefilterten Bild einfacher ist. Marr und Hildreth haben in [MH80] das LoG-Filter untersucht. Filtert man ein Bild mit vielen bzgl. σ verschiedenen LoG-Filtern, so erhält man schon aus der Lage der verschiedenen Nullstellen sehr viel Information über das Bild. Daß man damit nicht alle Bilder unterscheiden kann, wurde von Daugman [Dau88] gezeigt.

Bei der Konstruktion des LoG-Filters kann die Gauß-Funktion durch eine andere Gewichtsfunktion eines Glättungsfilters ersetzt werden. Damit erhält man dann ebenso ein Filter, welches Kanten durch Nullstellen im Filterergebnis anzeigt. Ist $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Filterfunktion, so heißt für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\tilde{h}(x) := \frac{1}{\alpha^2} h(\frac{1}{\alpha}x)$ gestreckte Version von h. Man würde nun erwarten, daß man durch Streckung der Filterfunktion mit $\alpha > 1$ stärker glättet, so daß man mit Nullstellensuche im Filterergebnis weniger Kanten findet.

Yuille und Poggio [YP86] zeigten, daß die Gauß-Funktion g_σ die einzige Funktion g ist, so daß mit zunehmender Varianz für jede stetige Funktion f die Funktion $\Delta g_\sigma * f$ keine neuen Nullstellen bekommt, sondern höchstens welche verschwinden. Damit entspricht diese Filterung der Vorstellung, daß die Kanten im Bild bei stärkerer werdender Glättung mehr und mehr verschwinden. Die Zuordnung von σ aus $\mathbb{R}^+$ auf die Nullstellenmenge der Faltung $\Delta g_\sigma * f$ ergibt eine parametrisierte Familie von Nullstellenmengen (*Scale Space*). Aus diesen Nullstellenmengen können nun Kantenbilder gewonnen werden, vgl. [Ber87] und [LJ89]. Dabei wird versucht, die Kanten bei großem σ zu finden und diese dann in den Filterergebnissen von Filtern mit kleinerem σ zur besseren Lokalisierung wiederzufinden.

Um Kanten mit Nullstellen im Filterergebnis anzuzeigen, muß man nicht den Laplace-Operator verwenden. In [SB91] werden die Überlegungen von Canny [Can83] dazu benutzt, um ein optimales Filter mit Hilfe der Variationsrechnung zu finden, welches an Kanten eine Nullstelle im gefilterten Bild erzeugt. Wie alle linearen Filter hat auch dieses Filter Probleme, wenn die Kanten im Bild unsymmetrisch sind.

2.4 Optimale lineare Filter zur Kantendetektion

Canny hat in [Can83] zur Kantendetektion unter den linearen Filtern eines ausgewählt, welches für eindimensionale Signale unter geeigneten Kriterien optimal ist. Er geht dabei zunächst von eindimensionalen Daten und zu findenden Kanten mit verschiedenen Kantenhöhen bei unterschiedlich starkem weißem Rauschen aus. Es werden von Canny lineare Operatoren betrachtet, welche an der Stelle der Kante ein lokales Maximum in ihrer Ausgabe erzeugen. Die Optimalität des Operators wird anhand der folgenden Kriterien überprüft:

- Die Wahrscheinlichkeiten, daß Kanten nicht entdeckt werden, und daß Kanten detektiert werden, wo keine sind, sollten klein sein.
- Die Kanten sollten gut lokalisiert werden.
- Für eine Kante sollte auch nur an einer Stelle eine Kante detektiert werden.

Diese Kriterien formalisiert Canny, so daß ein optimales lineares Filter mit Hilfe der Variationsrechnung gefunden werden kann. Für (zweidimensionale) Bilder schlägt Canny vor, ein Filter zu verwenden, welches senkrecht zur Kante wie die optimale Funktion im eindimensionalen verläuft und tangential zur Kante wie eine Gauß-Funktion. Es ist nicht klar in welchem Sinne der Operator von Canny im zweidimensionalen optimal ist.

Da man Kantenrichtungen, insbesondere wenn die Kanten nicht als Geraden durch das Bild verlaufen, nicht mit beliebiger Genauigkeit ermitteln kann, wird man sich bei der Filterung auf einige Kantenrichtungen beschränken. Als Approximation der Filtermasken können auch die Richtungsableitungen der Gauß-Funktion verwendet werden.

Da der optimale Operator vom Signal-Rausch-Verhältnis, der Kantenhöhe und der Kantenrichtung abhängt, welche a priori nicht bekannt sind, muß eine ganze Schar von Operatoren auf das Bild angewendet werden. An den Stellen der lokalen Maxima muß mit weiteren Operatoren das Rauschen geschätzt werden. Da die verschiedenen Filter für die verschiedenen Signal-Rausch-Verhältnisse die Kanten verschieden gut lokalisieren, gibt Canny an, an welchen Stellen letztendlich Kanten markiert werden. Das Filter von Canny nimmt also einige Rechenzeit und auch Speicher in Anspruch.

Von anderen Autoren sind die Überlegungen von Canny auf andere Bilddetails übertragen worden, vgl. [PK91]. In [SB91] wird der Ansatz von Canny im Hinblick auf den möglichen Abstand lokaler Maxima weiterentwickelt.

3 Das nichtlineare Gauß-Filter

3.1 Nichtlineare Filter

Ein lineares Filter erzeugt aus einem Kantenbild einen mehr oder weniger flachen Übergang zwischen den Plateaus rechts und links der Kante. Zur Demonstration wurde ein Kantenbild erzeugt und mit einem linearen Gauß-Filter mit $\sigma = 5$ gefiltert, vgl. Abbildung 5 auf Seite 15. Es gibt einige Ansätze, das lineare Gauß-Filter dahingehend zu verbessern, daß die Kanten unter der Filterung erhalten bleiben.

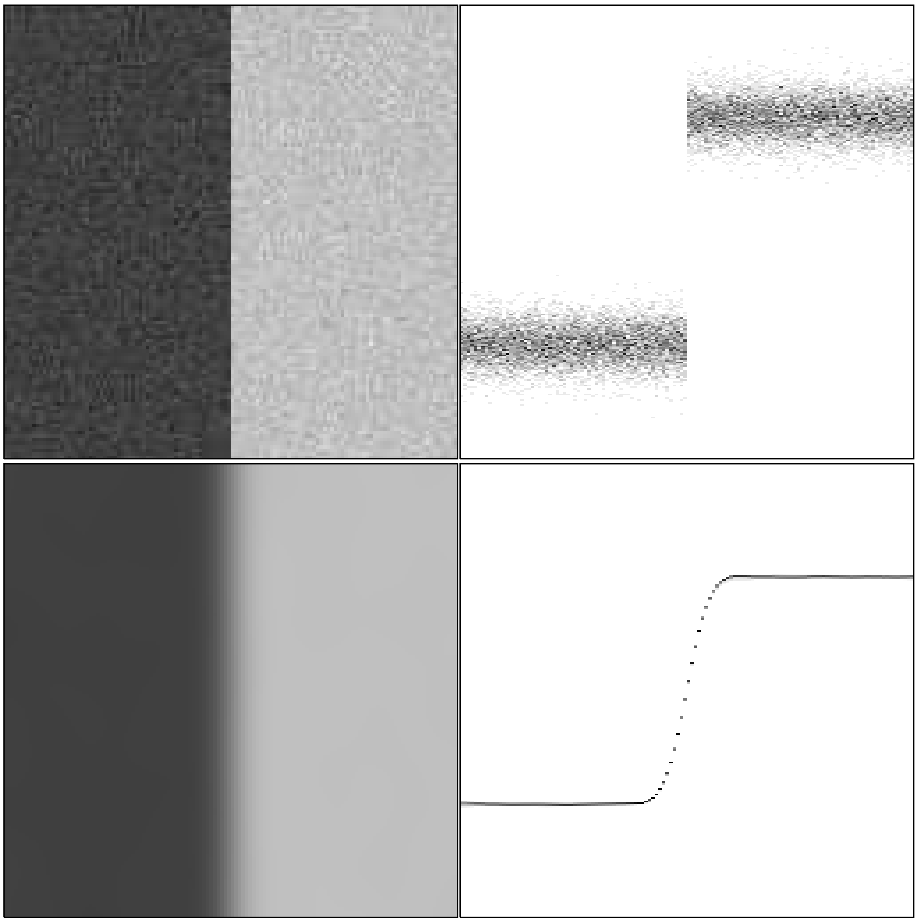
In Abschnitt 2.1 ist der Zusammenhang des Gauß-Filters mit den Lösungen der Wärmeleitungsgleichung beschrieben worden. In [PM90b] und [WP93] wird unter dem Begriff *Diffusion* die Wärmeleitungsgleichung so verändert, daß Kanten in den Lösungen besser erhalten bleiben. Iterative Filterung mit Hilfe von gewichteten Summen der Grauwerte wird in den Arbeiten [SMCM91] und [WVL81] untersucht, wobei die Gewichte von den jeweiligen Grauwerten abhängen; es werden jedoch jeweils nur so wenige Nachbarpixel in die Berechnung eines Filterwertes einbezogen, daß sie nur bedingt als Verbesserung des linearen Gauß-Filters betrachtet werden können. Mit Iterationen wird auch die Filterung in [NM79] und [Lee83] durchgeführt. Hier wird jedoch jeweils das arithmetische Mittel der Grauwerte einer geeigneten Umgebung berechnet, welche für jeden Punkt neu gewählt wird. In [Fle92b] wird die Berechnung der Gewichte von den Grauwertdifferenzen zum zentralen Pixel und der Grauwertverteilung in der Filterumgebung abhängig gemacht. Auch dieses Filter wird iteriert zur Glättung angewendet, es werden jedoch nur einige Iterationen durchgeführt.

Im folgenden wird ausgehend vom Gauß-Filter ein neues nichtlineares Filter vorgestellt, welches gewisse Kanten im Bild erhält. Dabei können die Parameter dieses Filters so eingestellt werden, daß sich das Filter wie das lineare Gauß-Filter verhält.

3.2 Motivation des nichtlinearen Gauß-Filters

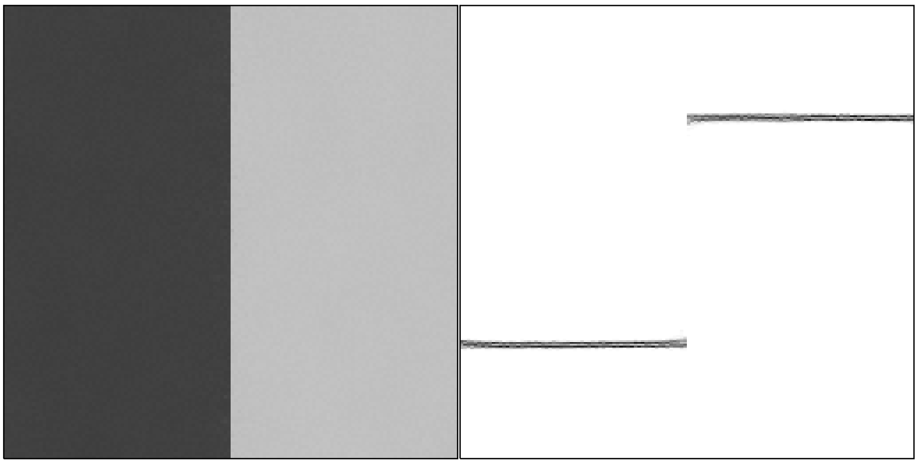
Für Bilder f ist auf Seite 2 die Zerlegung in Bildinformation I und Rauschen R eingeführt worden. In Kamerabildern ist das Rauschen durch die verwendete Technik beschränkt. Das Supremum $\alpha := \sup_p |R(p)|$ der Beträge des Rauschens bezeichnet man als *Rauschamplitude*.

In Abbildung 5 wird eine Kante sowie das Filterergebnis des linearen Gauß-Filters für diese Kante gezeigt. Um die Kante zu erhalten, ist es naheliegend, nur die Pixel q in die Berechnung des gefilterten Grauwertes $Gf(p)$ mit einzubeziehen, welche sich in ihrem Grauwert $f(q)$ nicht stärker als das doppelte der Rauschamplitude von $f(p)$ unterscheiden. Die Gewichte erhalten mit Hilfe der charakteristische Funktion $\chi_{[-2\alpha,2\alpha]}$ die Gestalt $g_\sigma(q)\chi_{[-2\alpha,2\alpha]}(f(q) - f(p))$. Werden die Gewichte in jeder Summe normiert, so ergibt sich



Oben ist eine Kante mit starkem Rauschen und großer Sprunghöhe zu sehen, unten das Filterergebnis eines linearen Gauß-Filters mit $\sigma = 5$. Die Projektion des Filterergebnisses entspricht bis auf einen Faktor der Abtastung einer Stammfunktion der Gauß-Funktion mit $\sigma = 5$.

Abbildung 5: Filterergebnis des linearen Gauß-Filters



Ergebnis der Filterung mit dem nichtlinearen Gauß-Filter, $\sigma_x = 5.0$, $\sigma_z = 40.0$.

Abbildung 6: Filterergebnis des nichtlinearen Gauß-Filter

für das Filter G:

$$\begin{aligned} Gf(p) &= \sum_{q \in \mathcal{P}} \frac{1}{N_p} g_\sigma(p-q)\chi_{[-2\alpha,2\alpha]}(f(p)-f(q))f(q) \text{ mit} \\ N_p &= \sum_{q \in \mathcal{P}} g_\sigma(p-q)\chi_{[-2\alpha,2\alpha]}(f(p)-f(q)) \end{aligned}$$

Nun sollten kleine Änderungen im Bild keine großen Änderungen im gefilterten Bild zur Folge haben. Das ist wegen der Benutzung der charakteristischen Funktion aber nicht gegeben. Es ist also wünschenswert, die Funktion $\chi_{[-2\alpha,2\alpha]}$ durch eine geeignete gleichmäßig stetige Funktion zu ersetzen. Es bietet sich auch hier wieder die Gauß-Funktion an. Da die Bildkoordinaten oft mit x und y bezeichnet werden, bezeichne ich den Parameter der Gauß-Funktion mit σ_z, um anzudeuten, daß er sich auf die Grauwerte des Bildes in den einzelnen Pixeln bezieht, welche die z-Koordinate der Punkte im Graphen bestimmen. Da zur Berechnung der Gewichte die Gauß-Funktion verwendet wird, heißt dieses Filter *nichtlineares Gauß-Filter*. In Abbildung 6 wird das Filterergebnis des nichtlinearen Gauß-Filters für das Kantenbild aus Abbildung 5 gezeigt. Das Kantenbild wird in eines übergeführt, in welchem das Rauschen deutlich vermindert, aber die Kante weiterhin genau zu lokalisieren ist.

3.3 Das nichtlineare Gauß-Filter

Definition 3.1 (Das nichtlineare Gauß-Filter) *Das* nichtlineare Gauß-Filter *werde mit G_{σ_x,σ_z} bezeichnet und habe die Gestalt:*

$$
\begin{aligned}
G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) &= \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p} g(p-q)\psi(f(p)-f(q))\cdot f(q) \text{ mit} \qquad (2)\\
N_p &= \sum_{q\in\mathcal{P}} g(p-q)\psi(f(p)-f(q))\\
g &: \mathcal{P}\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad p\mapsto \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\|p\|_2}{\sigma_x}\right)^2}\\
\psi &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,, \quad x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_z}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Da die Gewichte so normiert sind, daß ihre Summe 1 ergibt, kann das Filter als Summe des Grauwertes $f(p)$ und seines Abstandes zu $Gf(p)$ geschrieben werden. Da die Ableitung der Gauß-Funktion wieder mit Hilfe der Gauß-Funktion dargestellt werden kann (vgl. Formel 23 aus Anhang A.2, Seite 111), erhält man das

Korollar 3.2 *Für das nichtlineare Gauß-Filter gilt:*

$$
\begin{aligned}
G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) &= f(p) + \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p}\, g(p-q)\psi(f(q)-f(p))\cdot(f(q)-f(p)) \qquad (3)\\
&= f(p) + \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p}\, g(p-q)(-\sigma_z^2)\psi'(f(q)-f(p))\\
&= f(p) - \frac{\sigma_z^2}{N_p}\sum_{q\in\mathcal{P}} g(p-q)\psi'(f(q)-f(p)) \qquad (4)\\
\text{mit } N_p &= \sum_{q\in\mathcal{P}} g(p-q)\psi(f(p)-f(q))
\end{aligned}
$$

Die Differenz $Gf(p)-f(p)$ ist beschränkt, da ψ' beschränkt ist und $N_p > g(0)\psi(0)$ gilt.

Sind alle Pixelwerte in der Umgebung des Pixels p größer bzw. kleiner als $f(p)$, so sieht man mit Hilfe der Formel (4), daß auch der Pixelwert $Gf(p)$ durch die Filterung größer bzw. kleiner als $f(p)$ ist. In (3) und (4) ist der Summand mit $q=p$ immer Null, die Summe im Zähler kann somit auch über die Menge $\mathcal{P}\setminus\{p\}$ gebildet werden.

Bemerkung 3.3 (Resistenz) *In [Hub81] wird auf Seite 7 der Begriff der Resistenz eingeführt. Ein Filter heißt* resistent, *wenn kleine Änderungen an allen Grauwerten wie auch große Änderungen an einigen Grauwerten des Bildes nur zu kleinen Änderungen im gefilterten Bild führen. Das nichtlineare Gauß-Filter ist in diesem Sinne resistent.*

Das Box-Filter berechnet das arithmetische Mittel über einige Nachbarpixel und minimiert so den quadratischen Abstand des Pixelwertes im gefilterten Bild zu den Grauwerten der Nachbarn im ungefilterten Bild. Eine analoge Interpretation ist auch für das nichtlineare Gauß-Filter möglich:

Lemma 3.4 *Das nichtlineare Gauß-Filter minimiert einen gewichteten quadratischen Abstand zu den Grauwerten der Nachbarpixel.*

Beweis: Da die Gewichte normiert wurden, gilt

$$\sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p} g(p-q)\psi(f(q)-f(p)) = 1 \quad \forall p \in \mathcal{P}\,.$$

Nun erweitert man diese Formel mit $G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p)$ und betrachtet die Formel (2), mit welcher $G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p)$ definiert wurde:

$$\begin{aligned} G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p) &= \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p} g(p-q)\psi(f(q)-f(p)) \cdot G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p) \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p) &= \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p}\, g(p-q)\psi(f(p)-f(q)) \cdot f(q) \quad \forall p \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser Formeln erhält man:

$$0 = \sum_{q\in\mathcal{P}} \frac{1}{N_p}\, g(p-q)\psi(f(p)-f(q)) \cdot (f(q) - G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p)) \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Das heißt, $G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p)$ ist Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\sum_{q\in P} \frac{1}{N_p} g(p-q)\ \psi(f(p)-f(q)) \cdot (f(q)-\tau)^2\right).$$

Damit minimiert das nichtlineare Gauß-Filter den gewichteten quadratischen Abstand zu den Grauwerten der Nachbarpixel. Dieses Minimum ist als Minimum einer Parabel eindeutig.
□

Lemma 3.5 (Reduktion der Dimension) *Für $N_x, N_y \in I\!N$ bestehe ein Bild aus N_y Zeilen mit jeweils N_x Pixeln. Haben die Pixel in allen Spalten des Bildes jeweils den gleichen Grauwert, so gilt dies auch für das gefilterte Bild. Es reicht in diesem Fall die Wirkung des Filters auf die Zeilen, welche ja spezielle Bilder darstellen, zu untersuchen.*

Beweis: Wie die folgende Rechnung zeigt, gilt diese Aussage immer, wenn die Gewichtsfunktion das Produkt von zwei Funktionen ist, welche jeweils nur von einer Koordinate abhängen. Mit den Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
p &= (x_0, y_0),\\
q &= (x, y),\\
g(p-q) &= \varphi_{\sigma_x}(x-x_0)\varphi_{\sigma_x}(y-y_0)\forall q, p \in \mathcal{P},\\
f_x(x) &:= f((x,0))\forall x \in \mathbb{Z},\\
f_y(y) &:= f((0,y))\forall y \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

gilt:

$$
\begin{aligned}
f_x(x) &= f((x,y))\ \forall y \in \mathbb{Z}\\
\Rightarrow\ G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) &= \frac{\sum_q g(p-q)\psi(f(p)-f(q))f(q)}{\sum_q g(p-q)\psi(f(p)-f(q))}\\
&= \frac{\sum_x \sum_y \varphi_{\sigma_x}(y-y_0)\varphi_{\sigma_x}(x-x_0)\psi(f_x(x)-f_x(x_0))f_x(x)}{\sum_x \sum_y \varphi_{\sigma_x}(y-y_0)\varphi_{\sigma_x}(x-x_0)\psi(f_x(x)-f_x(x_0))}\\
&= \frac{\sum_x \varphi_{\sigma_x}(x-x_0)\psi(f_x(x)-f_x(x_0))f_x(x)}{\sum_x \varphi_{\sigma_x}(x-x_0)\psi(f_x(x)-f_x(x_0))}\\
&= \frac{\sum_{\{q\in\mathcal{P}|y=y_0\}} g(q-p)\psi(f(q)-f(p))f(q)}{\sum_{\{q\in\mathcal{P}|y=y_0\}} g(q-p)\psi(f(q)-f(p))}
\end{aligned}
$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, da die Summe über y gekürzt werden kann. Dann wurde der Bruch um den Term $\varphi_{\sigma_x}(y_0 - y_0)$ erweitert und das Produkt $\varphi_{\sigma_x}(x - x_0)\varphi_{\sigma_x}(y_0 - y_0)$ für $y = y_0$ durch $g(q - p)$ ersetzt. □

3.4 Ähnlichkeit mit einem M-Schätzer

Für das Filter gilt:

$$
G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) = \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}}\ g(q-p)\ \psi(f(q)-f(p))\ f(q)}{\sum_{q\in\mathcal{P}}\ g(q-p)\ \psi(f(q)-f(p))} \tag{5}
$$

Verzichtet man auf die Gewichtung in Abhängigkeit des Pixelabstandes, welche in (5) durch den Term $g(q - p)$ vorgenommen wird, und summiert statt dessen nur über gewisse Umgebungen $U(p)$ der Pixel p, so erhält man das Filter

$$
\tilde{G} f(p) := \frac{\sum_{q\in U(p)}\ \psi(f(q)-f(p))\ f(q)}{\sum_{q\in U(p)}\ \psi(f(q)-f(p))} \quad ,
$$

für welches

$$
0 = \sum_{q\in U(p)} \psi(f(q)-f(p))(f(q)-\tilde{G} f(p))
$$

bzw.

$$\sum_{q \in U(p)} \underbrace{\psi(f(q) - f(p)) \cdot (f(q) - \tilde{G}f(p))^2}_{=: \rho_{f(p)}(f(q); \tilde{G}f(p))} = \min! \tag{6}$$

gilt. $U(p)$ wird *Filterumgebung* genannt.

Sind die Grauwerte $f(p)$ Realisierungen von Zufallsvariablen Z_p, so können G und $\tilde{G}$ als Schätzer für die Erwartungswerte $E(Z_p)$ aufgefaßt werden. Es wird sich später zeigen, daß G und $\tilde{G}$ unter geeigneten Voraussetzungen sogar erwartungstreu sind.

Margeret M. Fleck hat in [Fle92b] bemerkt, daß solch ein Filter ein M-Schätzer im Sinne des Buches *Robust Statistics* von Peter J. Huber [Hub81, Seite 43] ist. Dabei ist der M-Schätzer vom Grauwert des Pixels p abhängig.

Es ist klar, daß dieses Filter genau wie das nichtlineare Gauß-Filter resistent ist. Es ist damit jedoch noch nicht gezeigt, daß das Filter robust ist. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, in welchem Sinne das nichtlineare Gauß-Filter ein robuster Schätzer ist.

Ersetzt man nun in jeder Stelle $p \in \mathcal{P}$ die Funktion ψ durch eine Trapez-Funktion, welche vom Rauschen abhängt, so erhält man das Filter, welches in [Fle92b] vorgestellt wird. Um eine starke Glättung zu erreichen wird von M. M. Fleck die Iteration des Filters vorgeschlagen; es sind nur einige wenige Iterationen nötig. Diese Arbeit ist vor allem interessant, da der Filterparameter jeweils in jeder Stelle an Hand des Bildes gewählt wird, indem zunächst in jeder Stelle die Varianz des Rauschens geschätzt wird. Da die Berechnung der Gauß-Funktion sehr aufwendig ist, ist eine lokale Wahl des Parameters σ_z für das nichtlineare Gauß-Filter von der Verfügbarkeit extrem schneller Rechner abhängig.

Eine Änderung der Größe der Filterumgebung in den einzelnen Iterationsschritten ist jedoch auch von M. M. Fleck nicht untersucht worden. Es wird später gezeigt, daß gerade durch die Änderung des Parameters σ_x des nichtlinearen Gauß-Filters eine Verbesserung der Kantenerhaltung unter der Iteration der Filterung erzielt werden kann. Dieses experimentelle Ergebnis, welches durch die Untersuchungen im nächsten Kapitel untermauert wird, läßt sich sicher auch auf das Filter von M. M. Fleck und andere ähnliche Filter übertragen.

4 Eigenschaften des nichtlinearen Gauß-Filters

Die Gauß-Filterkette ist eine spezielle Iteration des nichtlinearen Gauß-Filters. Die guten Ergebnisse der Gauß-Filterkette können von den Eigenschaften des nichtlinearen Gauß-Filters abgeleitet werden.

Da in vielen Artikeln der Begriff des robusten Operators verwendet wird, wird in diesem Kapitel unter anderem gezeigt, in welcher Weise das nichtlineare Gauß-Filter robust ist. Um einen ersten Eindruck von der Wirkung des Filters zu vermitteln, werden die Erwartungswerte der Grauwerte im gefilterten Bild für spezielle Situationen ausgerechnet. Zur Motivierung der Gauß-Filterkette wird dann die Wirkung des nichtlinearen Gauß-Filters auf Kanten und Rampen untersucht. Diese Ergebnisse machen deutlich, warum die Gauß-Filterkette in der Praxis so gute Ergebnisse liefert.

4.1 Eigenschaften als robuster Schätzer

4.1.1 Das Filter als Schätzer

Die Menge der möglichen Grauwerte der Pixel ist beschränkt. Um die Rechnungen nicht unnötig zu erschweren, treffen wir folgende

Vereinbarung 4.1 *Die Fehler der Grauwerte in einem Bild werden durch die Zufallsvariablen Z_p modelliert, welche unabhängig sind und Werte in $\mathbb{R}$ besitzen. Die Verteilungsfunktionen dieser Zufallsvariablen Z_p seien beliebig oft differenzierbar. Die Menge dieser Verteilungsfunktionen werde mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.*

Definition 4.2 (Levy-Metrik) *Auf der Menge $\mathcal{M}$ wird die* Levy-Metrik *durch*

$$d_L(F, G) := \inf\{\, \epsilon \geq 0 \mid \ \forall x \ \ F(x-\epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon) + \epsilon\}$$

definiert, vgl. [Hub81]. Man rechnet leicht nach, daß dies eine Metrik auf $\mathcal{M}$ ist.

Da die Verteilungsfunktionen aus $\mathcal{M}$ monoton wachsend und stetig sind, kann die Metrik wie folgt interpretiert werden: Es seien F und G Verteilungsfunktionen aus $\mathcal{M}$. Betrachten wir nun die Geraden $x \mapsto b - x$, welche rückwärts-diagonal (also monoton fallend) durch den Graphen der Funktionen laufen. Jede Verteilungsfunktion aus $\mathcal{M}$ hat mit einer solchen Geraden genau einen Schnittpunkt, d.h. für jedes $b \in \mathbb{R}$ gibt es $x_b, y_b \in \mathbb{R}$, so daß $F(x_b) = b - x_b, G(y_b) = b - y_b$. Es sei nun $\delta_b := y_b - x_b$. Damit gilt dann $\delta_b = F(x_b) - G(y_b)$ und somit auch $\delta_b + G(x_b + \delta_b) = F(x_b)$, $G(y_b) = F(y_b - \delta_b) - \delta_b$. In diesem Fall ist also $|\delta_b|$ kleiner oder gleich $d_L(F, G)$.

Bemerkung 4.3 *Für $b \in \mathbb{R}$ beschränkt die Levy-Metrik damit den maximalen Abstand der Schnittpunkte der Verteilungsfunktionen mit der Geraden $x \mapsto b - x$, welche rückwärts-diagonal durch den Graphen der Funktionen läuft. Es gilt:*

$$d_L(F, G) = sup\{|\delta_b| \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Die folgenden Eigenschaften haben mich bewogen, die Levy-Metrik zu verwenden. Da über die Stetigkeit hinaus auch die lokale Lipschitz-Stetigkeit eine Rolle spielt, ist es nützlich, eine Metrik zu verwenden, welche einem intuitivem Abstand entspricht.

Lemma 4.4 *Sind F und G Verteilungsfunktionen mit $F(x) = G(x+\epsilon)$, so gilt $d_L(F,G) \leq \epsilon$. Sind F, G und H Verteilungsfunktionen mit $G(x) := (1-\epsilon)F(x)+\epsilon H(x)$, so gilt ebenfalls $d_L(F,G) \leq \epsilon$.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar. Die zweite Aussage gilt wegen:

$$\begin{aligned} F(x-\epsilon)-\epsilon &\leq F(x)-\epsilon \\ &\leq \epsilon H(x) + F(x) - \epsilon \leq \epsilon H(x) + (1-\epsilon)F(x) \\ &= G(x) \\ &= (1-\epsilon)F(x) + \epsilon H(x) \\ &\leq F(x) + \epsilon \\ &\leq F(x+\epsilon) + \epsilon \end{aligned}$$

□

Für spätere Rechnungen wird das folgende Lemma benötigt. Es ist bemerkenswert, daß die Abschätzung nur von einer der beiden Dichten abhängt.

Lemma 4.5 *Sind F, G Verteilungsfunktionen aus $\mathcal{M}$, so gilt:*

$$d_L(F,G) \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \| F - G \|_\infty \leq \epsilon \left(\|F'\|_\infty + 1\right) \tag{7}$$

Beweis: Da die Dichte F' die Ableitung von F ist, gilt für alle x:

$$F(x) - \epsilon \, \|F'\|_\infty \leq F(x-\epsilon) \text{ und } F(x+\epsilon) \leq F(x) + \epsilon \, \|F'\|_\infty$$

Nach Definition des Levy-Abstandes ergibt sich

$$F(x) - \epsilon \, \|F'\|_\infty - \epsilon \leq F(x-\epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon) + \epsilon \leq F(x) + \epsilon \, \|F'\|_\infty + \epsilon$$

und somit auch

$$F(x) - \epsilon \left(\|F'\|_\infty + 1\right) \leq G(x) \leq F(x) + \epsilon \left(\|F'\|_\infty + 1\right)$$

und man erhält die Abschätzung:

$$|F(x) - G(x)| \leq \epsilon \left(\|F'\|_\infty + 1\right)$$

□

Bemerkung 4.6 *Ist ψ wie in Definition 3.1 die Gauß-Funktion zum Parameter σ_z, $w \in I\!R$, $F \in \mathcal{M}$, so gilt mit Hilfe der partiellen Integration:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x-w)F'(x)dx \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} \psi''(x-w)F(x)dx + \underbrace{\psi'(x-w)F(x)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} \tag{8}$$

Einige Rechnungen erfordern, daß Bilder als Familie von Grauwerten $z = (z_p)_{p\in\mathcal{P}} \in I\!R^{\mathcal{P}}$ geschrieben werden. π_p bezeichne die Projektion eines Bildes z auf den Grauwert z_p. Aus der Definition des nichtlinearen Gauß-Filters folgt unmittelbar das folgende Lemma:

Lemma 4.7 (Identitäten) *Es sei $z = (z_p)_{p\in\mathcal{P}} \in I\!R^{\mathcal{P}}$ ein Bild, $\alpha \in I\!R^+$, $c, \sigma_x, \sigma_z \in I\!R$. $(c)_{\mathcal{P}}$ ist das Bild mit konstantem Grauwert c. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot G_{\sigma_x,\sigma_z}(z) &= G_{\sigma_x,\alpha\sigma_z}(\alpha z) && (9)\\
-G_{\sigma_x,\sigma_z}(z) &= G_{\sigma_x,\sigma_z}(-z) && (10)\\
(G_{\sigma_x,\sigma_z} z) + (c)_{\mathcal{P}} &= G_{\sigma_x,\sigma_z}(z + (c)_{\mathcal{P}}) && (11)\\
(\pi_p G_{\sigma_x,\sigma_z} z) + c &= \pi_p G_{\sigma_x,\sigma_z}(z + (c)_{\mathcal{P}})
\end{aligned}$$

Sind die Grauwerte eines Bildes Realisierungen identisch verteilter Zufallsvariablen, so reicht wegen (11) aus, Zufallsvariablen zu betrachten, deren Erwartungswert gleich Null und deren Varianz wegen (9) gleich Eins ist. Betrachtet man identisch normalverteilte Zufallsvariablen, so reicht es also aus, standardisiert normalverteilte Zufallsvariablen zu betrachten.

Lemma 4.8 (Monotonie des Operators) *Es sei $p \in \mathcal{P}$ und f ein Bild. Mit $f(p)$ wird auch $Gf(p)$ größer, d.h. für alle Bilder $z \in I\!R^{\mathcal{P}}$ gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial z_p}\pi_p G(z) > 0$$

Beweis: Nach (2) bzw. (23) von Seite 17 bzw. 111 gilt:

$$\begin{aligned}
\pi_p G(z) &= \frac{1}{N_p}\sum_q g(p-q)\psi(z_p - z_q)z_q\\
N_p &= \sum_r g(p-r)\psi(z_p - z_r)\\
\frac{d}{dz_p}\psi(z_p - z_r) &= \psi(z_p - z_r)\frac{1}{-\sigma_z^2}(z_p - z_r) \quad \forall r \in \mathcal{P}\setminus\{p\}
\end{aligned}$$

Mit

$$Z_p := \sum_q g(p-q)\psi(z_p - z_q)z_q$$

gilt :

$$
\begin{aligned}
N_p^2 \cdot (\frac{\partial}{\partial z_p}\pi_p Gz) &= \\
&= N_p \frac{\partial}{\partial z_p} Z_p - Z_p \frac{\partial}{\partial z_p} N_p \\
&= \sum_{q \neq p} g(p-q)\psi(z_p - z_q) z_q \frac{1}{-\sigma_z^2} \underbrace{(z_p - z_q)}_{=0 \text{ für } q=p} N_p \\
&+ g(0)\psi(0) N_p \\
&- Z_p \sum_{r \neq p} g(p-r)\psi(z_p - z_r) \frac{1}{-\sigma_z^2} \underbrace{(z_p - z_r)}_{=0 \text{ für } r=p} \\
&= g(0)\psi(0) N_p \\
&+ \sum_q \sum_r \underbrace{g(p-q)g(p-r)\psi(z_p - z_q)\psi(z_p - z_r)\frac{1}{\sigma_z^2}}_{=:\alpha_{p,q,r}>0} \cdot \underbrace{[(z_q - z_p) - (z_r - z_p)]}_{z_q - z_r} \cdot z_q \\
&= g(0)\psi(0) N_p + \sum_q \sum_r \alpha_{p,q,r}(z_q - z_r) z_q \\
&= g(0)\psi(0) N_p + \sum_q \sum_{r<q} \alpha_{p,q,r} \underbrace{[(z_q - z_r) z_q + (z_r - z_q) z_r]}_{=(z_q - z_r)^2 \geq 0} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

□

Definition 4.9 (verrauschte Fläche) *Die Grauwerte des Bildes $z \in I\!R^{\mathcal{P}}$ seien Realisierungen der Zufallsvariablen Z_p. Sind die Zufallsvariablen unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert $c \in I\!R$ und Verteilungsfunktion in $\mathcal{M}$, so heißt z* verrauschte Fläche *zum Grauwert c. Für $c = 0$ wird das Bild als Rauschen bezeichnet. Sind die Zufallsvariablen Z_p normalverteilt, so heißt das Rauschen* Gaußsches Rauschen.

Die Dichte der Zufallsvariablen Z_p werde mit ϑ bezeichnet, $\vartheta_{\mathcal{P}}$ bezeichne die Dichte im Produktraum:

$$\vartheta_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p \in \mathcal{P}} \vartheta(z_p) \quad \forall z \in I\!R^{\mathcal{P}}$$

Die Dichte der Standardnormalverteilung werde mit φ bezeichnet.

Lemma 4.10 *Für $p \in \mathcal{P}$ seien Z_p identisch verteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte ϑ und Erwartungswert $c \in I\!R$. Es sei weiter $\vartheta(x + c)$ eine gerade Funktion. $Z := (Z_p)_{p \in \mathcal{P}}$ bezeichne den Zufallsvektor der Zufallsvariablen Z_p. Ist $\Phi\colon I\!R^{\mathcal{P}} \to I\!R$ eine meßbare Funktion, für welche $\Phi(z) = -\Phi(-z)$ sowie $\Phi(z + (c)_{p \in \mathcal{P}}) = \Phi(z) + c$ gilt, so ist Φ als Schätzer für den Erwartungswert $E(Z_p)$ erwartungstreu, d.h. $E(\Phi(Z)) = E(Z_p)\ \forall p \in \mathcal{P}$.*

Beweis: Zunächst betrachtet man den speziellen Fall $E(Z_p) = 0$, d.h. ϑ ist gerade. Es bezeichne ω_+ die Menge der Bilder z mit $\Phi(z) > 0$, ω_- die Menge der Bilder z mit $\Phi(z) < 0$ und ω_0 die Menge der Bilder mit $\Phi(z) = 0$. Die Abbildung $z \mapsto -z$ ist dann eine Bijektion der meßbaren Mengen ω_+ und ω_-. Diese Bijektion induziert auch eine Bijektion der meßbaren Teilmengen von ω_+ bzw. ω_-, welche jeweils das gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß besitzen. Es gilt daher:

$$\int_{\omega_+} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} = -\int_{\omega_-} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}}$$

und

$$\int_{\omega_0} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} = \int_{\omega_0} 0 d\lambda^{\mathcal{P}} = 0$$

und somit:

$$\begin{aligned} E(\Phi(Z)) &= \int_{I\!R^{\mathcal{P}}} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= \int_{\omega_+} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} + \int_{\omega_-} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} + \int_{\omega_0} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $E(Z_p) = c \neq 0$ folgt daraus mit Hilfe einer Substitution:

$$\begin{aligned} E(\Phi(Z)) &= \int_{I\!R^{\mathcal{P}}} \Phi(z)\vartheta_{\mathcal{P}}(z)d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= \int_{I\!R^{\mathcal{P}}} \Phi(z) \prod_{q\in\mathcal{P}} \vartheta(z_q)d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= \int_{I\!R^{\mathcal{P}}} \left([\Phi(z + (c)_{\mathcal{P}}) \prod_{q\in\mathcal{P}} \vartheta(z_q + c) \right) d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= \int_{I\!R^{\mathcal{P}}} (\Phi(z) + c) \prod_{q\in\mathcal{P}} \underbrace{\vartheta(z_q + c)}_{\text{gerade in } z_q} d\lambda^{\mathcal{P}} \\ &= \underbrace{\int_{I\!R^{\mathcal{P}}} \Phi(z) \prod_{q\in\mathcal{P}} \vartheta(z_q + c)d\lambda^{\mathcal{P}}}_{=0} + \underbrace{\int_{I\!R^{\mathcal{P}}} c \prod_{q\in\mathcal{P}} \vartheta(z_q + c)d\lambda^{\mathcal{P}}}_{=c} \\ &= c \end{aligned}$$

□

Bezeichnung 4.11 *Sind die Grauwerte $f(p)$ Realisierungen von identisch verteilten unabhängigen Zufallsvariablen Z_p mit Dichte ϑ, so ist auch $Gf(p)$ eine Realisierung einer Zufallsvariablen, welche mit $U_{p,\vartheta}$ bezeichnet wird. Es besteht der folgende Zusammenhang:*

$$U_{p,\vartheta} = Z_p - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(Z_q - Z_p) \cdot (Z_q - Z_p)}{\sum_{q\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(Z_q - Z_p)} \tag{12}$$

Sind die Zufallsvariablen Z_p standardisiert normalverteilt, so wird die Zufallsvariable kurz mit U_p bezeichnet.

Lemma 4.12 (Das nichtlineare Gauß-Filter ist erwartungstreu) *Es sei $p \in \mathcal{P}$ fest gegeben und ϑ eine Dichte mit Erwartungswert $c \in I\!R$. Die Grauwerte der Bilder $z \in I\!R^{\mathcal{P}}$ seien Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen mit Dichte ϑ. Ist $\vartheta(x+c)$ eine gerade Funktion, so ist das nichtlineare Gauß-Filter ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert c von Z_p, d.h. $E(U_{p,\vartheta}) = E(Z_p)$.*

Beweis: Das nichtlineare Gauß-Filter erfüllt die Identitäten 4.7, so daß die Behauptung aus Lemma 4.10 folgt. □

Zunächst ist nun die Verteilung der Grauwerte im gefilterten Bild von Interesse. Um die Verteilungsfunktion von U_p auszurechnen, benötigt man eine Darstellung der Umkehrfunktion von ψ' aus Elementarfunktionen. Eine solche Darstellung ist mir nicht bekannt. Eine empirische Schätzung der Dichten der Zufallsvariablen U_p wird im nächsten Kapitel mit Hilfe eines Testbildes und speziellen Filterparametern durchgeführt. Um das Verhalten des Filters zu beschreiben, werden nun Erwartungswerte und Varianzen zu verschiedenen statistischen Modellen untersucht.

Die Untersuchungen der Erwartungswerte der Zufallsvariablen U_p sind sehr schwierig, da Zähler und Nenner des Bruches in (12) nicht unabhängig sind. Es wird daher eine neue Zufallsvariable eingeführt, welche ähnliche Eigenschaften hat, jedoch leichter zu berechnen ist. Dazu wird der Nenner in der Formel (3) auf Seite 17 durch Ersetzung von $\psi(f(q)-f(p))$ durch $\psi(0)$ nach oben abgeschätzt.

Bezeichnung 4.13 *Wie in 4.11 seien die Zufallsvariablen Z_p unabhängig identisch verteilt mit Dichte ϑ. Es sei:*

$$\begin{aligned} \tilde{G}f(p) &:= f(p) + \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(f(q)-f(p))\cdot(f(q)-f(p))}{\sum_{p\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(0)} \\ V_{p,\vartheta} &:= Z_p + \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(Z_q-Z_p)\cdot(Z_q-Z_p)}{\sum_{p\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(0)} \end{aligned}$$

Sind die Zufallsvariablen standardisiert normalverteilt, so wird auch hier die Zufallsvariable kurz mit V_p bezeichnet.

Der Wert $\tilde{G}f(p)$ liegt immer zwischen $f(p)$ und $Gf(p)$. Da auch dieses Filter die Identitäten erfüllt, welche in Lemma 4.7 für das nichtlineare Gauß-Filter formuliert wurden, folgt aus Lemma 4.10 die

Bemerkung 4.14 *Das Lemma 4.12 gilt analog auch für das Filter $\tilde{G}$.*

Um einen Eindruck zu bekommen, in welcher Weise das nichtlineare Gauß-Filter Rauschen glättet, wird nun untersucht, mit welchem Wert $G_{\sigma_x,\sigma_z}f(p)$ man bei vorgegebenem Wert für $f(p)$ rechnen kann, wenn die anderen Pixel nur zufälliges Rauschen enthalten.

Bezeichnung 4.15 *Die Grauwerte des Bildes z seien für alle Pixel $q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}$ Realisierungen unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen Z_q mit Dichte ϑ. In p habe das Bild den den festen Wert $z_p := w \in \mathbb{R}$.*

Der Wert $Gf(p)$ ist dann eine Realisierung der Zufallsvariablen

$$U_{p,w,\vartheta} := w + \frac{\sum_{q \in \mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(Z_q - w)\cdot(Z_q - w)}{g(0)\psi(0) + \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(Z_q - w)} \quad .$$

Da die Zufallsvariablen Z_q im Zähler und im Nenner vorkommen, sind Zähler und Nenner in dieser Formel nicht notwendig unabhängig. In einigen Fällen muß daher mit der Vereinfachung des Filters gearbeitet werden. Es sei:

$$V_{p,w,\vartheta} := w + \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(Z_q - w)\cdot(Z_q - w)}{\sum_{q\in\mathcal{P}} g(q-p)\psi(0)}$$

Sind die Zufallsvariablen Z_p standardisiert normalverteilt, so schreibt man kurz $U_{p,w}$ bzw. $V_{p,w}$.

$E(V_{p,w,\vartheta})$ bzw. $E(U_{p,w,\vartheta})$ ist eine Version des bedingten Erwartungswertes $E(V_{p,\vartheta}|Z_p = w)$ bzw. $E(V_{p,\vartheta}|Z_p = w)$.

Lemma 4.16 (Vergleich spezieller Erwartungswerte) *Ist $(Z_q)_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}$ eine Familie unabhängiger, identisch normalverteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(Z_q) = c$ und Dichte ϑ, so gilt:*

$$\begin{aligned} c < w \quad &\Rightarrow \quad c < E(U_{p,w,\vartheta}) < E(V_{p,w,\vartheta}) < w \\ w < c \quad &\Rightarrow \quad w < E(V_{p,w,\vartheta}) < E(U_{p,w,\vartheta}) < c \end{aligned}$$

Beweis: Mit ϑ werde die Dichtefunktion der Zufallsvariablen Z_p bezeichnet. Für $w > c$, $q \in \mathcal{P}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha < \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(p-q)\psi(0)$ rechnet man:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-w)\psi(t-w)\vartheta(t)}{\alpha+\beta\psi(t-w)} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\psi(t)\vartheta(w+t)}{\alpha+\beta\psi(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{t\psi(t)\vartheta(w+t)}{\alpha+\beta\psi(t)} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{t\psi(t)\vartheta(w+t)}{\alpha+\beta\psi(t)} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{-t\psi(-t)\vartheta(w-t)}{\alpha+\beta\psi(t)} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{t\psi(t)\vartheta(w+t)}{\alpha+\beta\psi(t)} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \underbrace{\frac{t\psi(t)[\vartheta(w+t)) - \vartheta(w-t))]}{\alpha+\beta\psi(t)}}_{\leq 0 \ \forall t>0\, \forall w>c \ \text{da } \vartheta \text{ glockenförmig}} dt \end{aligned}$$

Der Nenner wird nun vergrößert, so daß das Integral auch größer wird. Führt man dann die Umformungen von oben in umgekehrter Reihenfolge durch, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&< \int_0^\infty \frac{t\psi(t)[\vartheta(t+w)-\vartheta(t-w)]}{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(0)+\beta\psi(0)}dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{(t-w)\psi(t-w)\vartheta(t)}{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(0)+\beta\psi(0)}dt
\end{aligned}
$$

Für die Familie $(z_r)_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} \in I\!R^{\mathcal{P}\setminus\{p\}}$ und $q\in\mathcal{P}$ gilt für $w>c$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(r-p)\psi(z_r-w)+\psi(0)\psi(0)}dz_q \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q))}{\underbrace{\sum_{r\in\mathcal{P}\setminus\{q,p\}} g(r-p)\psi(z_r-w)+\psi(0)\psi(0)}_{\alpha}+\underbrace{g(q-p)}_{\beta}\psi(z_q-w)}dz_q \\
&< \int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum\limits_{r\in\mathcal{P}\setminus\{q,p\}} g(r-p)\psi(0)+\psi(0)\psi(0)+g(q-p)\psi(0)}dz_q \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum\limits_{r\in\mathcal{P}} g(r-p)\psi(0)}dz_q \quad < \quad 0
\end{aligned}
$$

Für das Integral über die Bilder $z\in I\!R^{\mathcal{P}}$ mit $z_p=w>c$ ergibt sich damit die Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\int_{I\!R^{\mathcal{P}\setminus\{p\}}} \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}}\psi(r-p)\psi(z_r-w)} \prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \vartheta(z_r)d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p\}} \\
&= \int_{I\!R^{\mathcal{P}\setminus\{p,q\}}}\int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}}\psi(r-p)\psi(z_r-w)}dz_q \prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \vartheta(z_r)d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \\
&< \int_{I\!R^{\mathcal{P}\setminus\{p,q\}}}\int_{-\infty}^\infty \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}}\psi(r-p)\psi(0)}dz_q \prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \vartheta(z_r)d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \\
&= \int_{I\!R^{\mathcal{P}\setminus\{p\}}} \frac{(z_q-w)\psi(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}}\psi(r-p)\psi(0)} \prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p,q\}} \vartheta(z_r)d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p\}}
\end{aligned}
$$

Ist ω_w die Menge der Bilder, welche im Pixel p den Grauwert $w>c$ enthalten, so folgt aus den beiden Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
E(U_{p,w,\vartheta}) &= w+\int_{\omega_w}\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}\left(\frac{g(q-p)\psi(z_q-w)(z_q-w)}{\sum_{r\in\mathcal{P}} g(r-p)\psi(z_r-w)}\prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}\vartheta(z_r)\right)\ d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p\}} \\
&= w+\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}\left(g(q-p)\int_{\omega_w}\frac{\psi(z_q-w)(z_q-w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r\in\mathcal{P}} g(r-p)\psi(z_r-w)}\prod_{r\in\mathcal{P}\setminus\{p,q\}}\vartheta(z_r)\ d\lambda^{\mathcal{P}\setminus\{p\}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< \; w + \sum_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} \left(g(q-p) \int_{\omega_w} \frac{\psi(z_q - w)(z_q - w)\vartheta(z_q)}{\sum_{r \in \mathcal{P}} g(r-p)\psi(0)} \prod_{r \in \mathcal{P} \setminus \{p,q\}} \vartheta(z_r) \;\; d\lambda^{\mathcal{P} \setminus \{p\}} \right) \\
&= \; E(V_{p,w,\vartheta}) \; < \; w
\end{aligned}
$$

Analog Lemma 4.10 gilt $E(U_{p,w,\vartheta}) = c$, wenn $w = c$. Da die Erwartungswerte mit w größer werden, vgl. dazu Lemma 4.8, gilt auch $c < E(U_{p,w,\vartheta})$ für alle $w > c$.

Die Aussage für $w < c$ folgt analog. □

Bemerkung 4.17 *Man kann sagen: Durch die Vergrößerung des Nenners ist der Effekt der Glättung nicht mehr so stark, das Filter ist in seiner Wirkung schwächer geworden. Die mit dieser Vereinfachung gezeigten Effekte werden also in der Praxis übertroffen.*

4.1.2 Robustheit

Es soll nun nachgewiesen werden, daß das Filter robust gegen kleine Änderungen der Verteilung der Zufallsvariablen Z_q der Pixel $q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}$ ist, d.h. insbesondere daß der Erwartungswert der Schätzwerte $\tilde{G}f(p)$ lokal Lipschitz-stetig von jenen Verteilungen abhängt.

Um die Berechnung der Erwartungswerte $E(V_{p,w})$ zu erleichtern, werden nun zunächst einige Bezeichnungen eingeführt.

Definition 4.18 *Für $p \in \mathcal{P}$ seien:*

$$
\begin{aligned}
\gamma(p) \; &:= \; \sum_{q \in \mathcal{P}} g(q-p) \\
\gamma_0(p) \; &:= \; \sum_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} g(q-p) \; = \; \gamma(p) - g(0) \\
\gamma_2(p) \; &:= \; \sum_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} g(q-p)^2 \; \leq \; g(0)\gamma_0(p) \\
\mu_p \; &:= \; \frac{1}{\gamma(p)} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)} = \mu_p \gamma_0(p) = 1 - \mu_p g(0)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4.19 *Da Werte der Gauß-Funktion $g_\sigma(x)$ für $\sigma > 0.7$ und $x \in \mathbb{R}$ schon sehr gut mit dem Wert des Integrals der Gauß-Funktion*

$$
\int_{x-0.5}^{x+0.5} g_\sigma(y) dy
$$

übereinstimmt und zusätzlich die Gauß-Funktion für große Werte schnell sehr klein wird, gilt für Pixel, welche nicht zu weit am Rand liegen, $\gamma(p) \approx 1$ und somit auch:

$$
\mu_p \approx 1
$$

Lemma 4.20 *Es sei $p \in \mathcal{P}$ und $w \in I\!R$. Der Erwartungswert $E(V_{p,w,F'})$ ist lokal Lipschitz-stetig auf der Menge der Verteilungsfunktionen $\mathcal{M}$.*

Beweis: Es seien $F, H \in \mathcal{M}$ zwei Verteilungsfunktionen mit $d_L(F, H) < \epsilon$. Mit den Identitäten aus Anhang A.3 und den Formeln (7) auf Seite 22 und (8) auf Seite 23 gilt für die Erwartungswerte:

$$
\begin{aligned}
E(V_{p,w,F'}) &= w - \frac{\sum_{q \in P\setminus\{p\}} g(q-p) \int_{-\infty}^{\infty} (t-w)\psi(t-w)F'(t)dt}{\gamma(p)\psi(0)} \\
|E(V_{p,w,F'}) &- E(V_{p,w,H'})| \\
&= \frac{1}{\gamma(p)\psi(0)} \left| \sum_{q \in P\setminus\{p\}} g(q-p) \int_{-\infty}^{\infty} (t-w)\psi(t-w)(F'(t)-H'(t))dt \right| \\
&= \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma_z^2)\psi'(t-w)(F'(t)-H'(t))dt \right| \\
&= \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z^2\psi''(t-w)(F(t)-H(t))dt \right| \\
&\leq \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma_z^2\psi''(t-w)|dt \cdot (\| F' \|_\infty + 1)\epsilon \\
&\leq \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \cdot \frac{4}{\sqrt{2\pi e}} \cdot (\| F' \|_\infty + 1)\epsilon \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Das heißt, daß der Erwartungswert $E(V_{p,w,F'})$ lokal Lipschitz-stetig auf der Menge der im Modell verwendeten Verteilungsfunktionen für die Nachbarpixel ist. □

Da das nichtlineare Gauß-Filter in der Stelle $p \in \mathcal{P}$ den Erwartungswert $E(Z_p)$ schätzt, ist klar, daß sich im allgemeinen durch Änderung der Verteilungsfunktion von Z_p und damit des Erwartungswertes von Z_p im Wahrscheinlichkeitsmodell, sich auch der Erwartungswert des Grauwertes des Pixels p im gefilterten Bild ändert. Interessant ist daher die Frage, wie der Erwartungswert $E(V_{p,F'})$ von den Verteilungsfunktionen F anhängt, wenn die Verteilungen den gleichen Erwartungswert haben.

Für $c \in I\!R$ sei $\mathcal{M}_c$ die Menge der Verteilungsfunktionen in $\mathcal{M}$, so daß gilt: Ist X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion aus $\mathcal{M}_c$, so gilt $E(X) = c$.

Lemma 4.21 *Der Erwartungswert $E(V_{p,F'})$ ist lokal Lipschitz-stetig auf der Menge der Verteilungsfunktionen $\mathcal{M}_c$.*

Beweis: Es seien $F, H \in \mathcal{M}_c$ mit $d_L(F, H) < \epsilon$. Da $E(V_{p,w,F'})$ eine Version der bedingten Erwartung $E(V_{p,F'}|Z_{p,F'} = w)$ ist, kann der Abstand der Erwartungswerte $|E(V_{p,F'}) - E(V_{p,H'})|$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$
|E(V_{p,F'}) - E(V_{p,H'})| =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(V_{p,w,F'}) F'(w) dw - \int_{-\infty}^{\infty} E(V_{p,w,H'}) H'(w) dw \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (E(V_{p,w,F'}) - E(V_{p,w,H'})) F'(w) dw \right| + \qquad (14) \\
&\qquad \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(V_{p,w,H'}) \left(F'(w) - H'(w) \right) \, dw \right| \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Ungleichung (13) für $|E(V_{p,w,F'}) - E(V_{p,w,H'})|$ kann der Summand (14) durch folgenden Ausdruck nach oben abgeschätzt werden:

$$
\frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \cdot \frac{4}{\sqrt{2\pi e}} \cdot (\| F' \|_\infty + 1) \; \epsilon \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F'(w) dw}_{=1} \qquad (16)
$$

Für die Abschätzung des zweiten Summanden (15) betrachtet man zunächst:

$$
\begin{aligned}
E(V_{p,w,H'}) - w &= -w + E\left(w + \frac{1}{\gamma(p)\psi(0)} \sum_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} (Z_{q,H'} - w) \psi(Z_{q,H'} - w) g(q-p) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(p)\psi(0)} \sum_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} E((Z_{q,H'} - w) \psi(Z_{q,H'} - w) g(q-p)) \\
&= \frac{-\sigma^2 \gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(t-w) H'(t) dt \qquad (17) \\
&= \frac{\sigma^2 \gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(w-t) H'(t) dt \\
&= \frac{\sigma^2 \gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \psi' * H'(w)
\end{aligned}
$$

Da die Verteilungsfunktionen F und H in $\mathcal{M}_c$ liegen, gilt nun für (15):

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} E(V_{p,w,H'}) \left(F'(w) - H'(w) \right) \, dw \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} (E(V_{p,w,H'}) - w) \left(F'(w) - H'(w) \right) \, dw
\end{aligned}
$$

Es wird nun die Formel (17) von oben angewendet und dann mit Hilfe des Satzes von Fubini die Reihenfolge der Integrationen vertauscht.

$$
\begin{aligned}
= & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\sigma_z^2 \gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(t-w) H'(t) dt \right) (F'(w) - H'(w)) dw \\
= & \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma_z^2) \; \psi'(t-w) H'(t) dt \right) (F'(w) - H'(w)) dw
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma_z^2)\ \psi'(t-w)(F'(w)-H'(w))dw \right) H'(t)dt \\
&= \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma_z^2)\ \psi'(w-t)(H'(w)-F'(w))dw \right) H'(t)dt
\end{aligned}
$$

Wie für die Berechnung der Formel (13) gezeigt wurde, berechnet das innere Integral zusammen mit dem Bruch vor den Integralen die Differenz zweier Erwartungswerte.

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} (E(V_{p,t,H'}) - E(V_{p,t,F'}))H'(t)dt
$$

Damit kann der Summand (15) wie der Summand (14) durch den Ausdruck (16) nach oben abgeschätzt werden. Für $F, H \in \mathcal{M}_c$ mit $d_L(F,H) < \epsilon$ erhält man:

$$
|E(V_{p,F'}) - E(V_{p,H'})| \ \leq \ 2 \cdot \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \cdot \frac{4}{\sqrt{2\pi e}} \cdot (\| F' \|_\infty +1) \cdot \epsilon
$$

Damit sind die Erwartungswerte $E(V_{p,F'})$ lokal Lipschitz-stetig auf der Menge der Verteilungsfunktionen $\mathcal{M}_c$. □

Gleichzeitig sind die Filter G und $\tilde{G}$ resistent, vgl. Bemerkung 3.3, d.h. auch bei großen Änderungen der Verteilungen einiger Nachbarpixel ändert sich der Erwartungswert der Schätzung $\tilde{G}f(p)$ kaum. Eine starke Änderung des Wertes $f(p)$ kann dagegen eine ungefähr ebenso starke Änderung des Schätzwertes $Gf(p)$ bzw. $\tilde{G}f(p)$ bewirken.

Für eine Familie $(H_q)_{\mathcal{P}}$ von Verteilungen sei $V_{p,w,(H'_q)_{\mathcal{P}}}$ analog $V_{p,w,\vartheta}$ definiert. Gilt $d_L(F, H_q) \leq \epsilon \ \forall q \neq p$, dann kann $|E(V_{p,w,F'}) - E(V_{p,w,(H'_q)_{\mathcal{P}}})|$ analog (13) von Seite 30 abgeschätzt werden.

Bemerkung 4.22 *Das nichtlineare Gauß-Filter ist als Schätzer für den Erwartungswert $E(Z_p)$ robust gegen Fehler bei der Annahme, daß die Grauwerte in einer Umgebung um p Realisierungen identisch verteilter Zufallsvariablen sind.*

Wie die Messungen von M. M. Fleck [Fle92a] zeigen, haben die Verteilungsfunktionen der Grauwerte realer Bilder in etwa die Form einer Normalverteilung. Da sich mit der Normalverteilung leicht rechnen läßt, wird diese oft an Stelle der unbekannten Verteilung des Bildrauschens verwendet.

4.1.3 Berechnung spezieller Werte

Im folgenden seien die Zufallsvariablen Z_p unabhängig und standardisiert normalverteilt, die Dichte der Zufallsvariablen ist die Gauß-Funktion, sie werde mit φ bezeichnet wird. Es gelte zusätzlich

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right) \\ \text{so daß} \quad \psi &= \varphi_{\sigma_z} . \end{aligned}$$

Es werden nun einige Erwartungswerte ausgerechnet und als Graph gezeigt.

Erwartungswert und Varianz von V_p

Um einen Eindruck von der Filterung zu geben, wird nun der Erwartungswert $E(V_{p,w})$ ausgerechnet und graphisch dargestellt. Mit Hilfe der Ungleichungen aus Lemma 4.16 gewinnt man so auch Informationen über den Erwartungswert $E(U_{p,w})$.

Mit Hilfe der Formel (25) aus Abschnitt A.3 wird nun $E(V_{p,w})$ berechnet.

$$\begin{aligned} E(V_{p,w}) &= E\left(w + \frac{1}{\gamma(p)\psi(0)} \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} (Z_q - w)\psi(Z_q - w)g(q-p)\right) \\ &= w + \frac{1}{\gamma(p)\psi(0)} \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} E\left((Z_q - w)\psi(Z_q - w)g(q-p)\right) \\ &= w + \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-w)\psi(t-w)\varphi(t)dt \\ &= w - w\frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)} \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1} \varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w) \qquad (18) \\ &= w + \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)} \sigma_z^2 \varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w) \qquad \left(\xrightarrow{\sigma_z \to 0^+} \quad w\right) \end{aligned}$$

Der Bruch $\frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)} = 1 - \mu_p g(0)$ ist eine mit σ_x von unten gegen 1 strebende Funktion. Der Erwartungswert wird in Abbildung 7 auf Seite 39 ohne den Faktor $\frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)}$ als Graph für verschiedene Grauwerte w dargestellt. Man sieht, wie der Erwartungswert mit wachsendem σ_z kleiner wird. Wird σ_z immer größer, so werden immer mehr Pixel in die Glättung mit einbezogen, der Bereich der Werte w mit $|E(V_{p,w})| \ll |w|$ wird immer größer.

Auch für die Berechnung der Varianz von $Gf(p)$ bei vorgegebenem Grauwert w für Z_p wird die Formel (25) verwendet:

$$\begin{aligned} &Var(V_{p,w}) = \\ &\quad = Var\left(w + \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}(Z_q - w)\psi(Z_q - w)g(q-p)}{\gamma(p)\psi(0)}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma(p)^2\psi(0)^2} \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus p} Var\left((Z_q - w)\psi(Z_q - w)\right) g(q-p)^2 \\
&= \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)^2}{\gamma(p)^2\psi(0)^2} E\left(\left((Z_q - w)\psi(Z_q - w) - \int_{-\infty}^{\infty}(t-w)\psi(t-w)\varphi(t)dt\right)^2\right) \\
&= \frac{\gamma_2(p)}{\gamma(p)^2\psi(0)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left((s-w)\psi(s-w) - \int_{\infty}^{\infty}(t-w)\psi(t-w)\varphi(t)dt\right)^2\varphi(s)ds \\
&= \frac{\gamma_2(p)}{\gamma(p)^2}\cdot\frac{1}{\psi(0)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left((s-w)\psi(s-w) + \sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)\right)^2\varphi(s)ds
\end{aligned}
$$

Ohne den Bruch ist die Formel in Abbildung 7 auf Seite 39 als Funktion von σ_z für verschiedene Werte für w dargestellt.

Die Varianz wird mit wachsendem σ_x sehr klein, es gilt:

$$
\frac{\gamma_2(p)}{\gamma(p)^2} = \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)^2}{\gamma(p)^2} \leq \frac{g(0)\gamma(p)}{\gamma(p)^2} \leq \mu_p g(0)
$$

Halbierung des Grauwertes

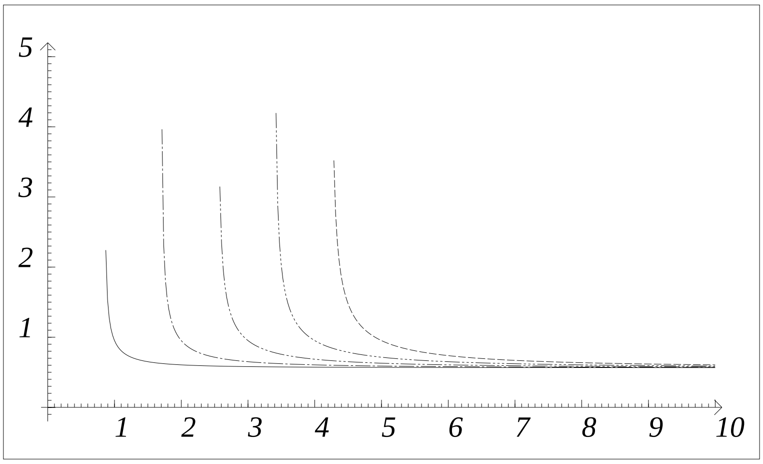
Ist das Bild eine verrauschte Fläche mit Grauwert Null und wollen wir das Rauschen halbieren, so fragen wir uns, welche Parameter wir wählen müssen. Wir gehen davon aus, daß das Pixel p den Grauwert w besitzt. Angenommen, der Parameter σ_z der Filterung liegt fest. Wie groß muß nun das σ_x sein, damit der Erwartungswert des Grauwertes des Pixels p nach der Filterung $\frac{1}{2}w$ beträgt. Das Pixel p liege in der Mitte des Bildes, so daß angenommen werden kann, daß $\gamma(p) \approx 1$ gilt. Gesucht ist σ_x mit:

$$
\begin{aligned}
E(V_{p,w}) &= w + \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)\psi(0)}\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w) \stackrel{!}{=} \frac{w}{2} \\
\Rightarrow \frac{-w\cdot\psi(0)}{2\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} &\stackrel{!}{=} \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)}
\end{aligned}
$$

Mit der Approximation von oben gilt:

$$
\begin{aligned}
1 - g(0) &\approx \frac{\gamma_0(p)}{\gamma(p)} = \frac{-w\cdot\psi(0)}{2\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} \\
\frac{1}{\sigma_x^2}\varphi(0) &\approx \frac{w\cdot\psi(0)}{2\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} + 1 \\
\sigma_x &\approx \left(\frac{2\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)\varphi(0)}{w\psi(0) + 2\sigma_z^2\varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}\right)^{\frac{1}{2}} =: h_1(w,\sigma_z)
\end{aligned}
$$

Ist $h_1(w,\sigma_z) < 0$, so gibt es kein σ_x mit der gesuchten Eigenschaft. Für einige Werte w wurden die Funktionen $\sigma_z \mapsto h_1(w,\sigma_z)$ berechnet:



$\sigma_z \mapsto h_1(w,\sigma_z)$ für $w = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$

Bemerkung 4.23 *Soll also der Erwartungswert $E(V_{p,w})$ nur halb so groß sein wie w, so muß das σ_z etwas größer als w gewählt werden. Der Wert des Parameters σ_x kann dann klein (c.a. 1) sein. Im Falle einer nicht standardisierten Normalverteilung heißt das: Ist c der Erwartungswert der unabhängig identisch normalverteilten Zufallsvariablen Z_q, so sollte man also σ_z etwas größer als $|w-c|$ wählen und σ_x sollte etwa eins betragen.*

Ersetzung des Nenners durch seinen Erwartungswert

Um die Berechnungen der Erwartungswerte durchführen zu können, wurde die Zufallsvariable $V_{p,w}$ eingeführt, welche sich durch Abschätzung des Nenner aus der Zufallsvariablen $U_{p,w}$ ergeben hat. Die Varianz des Nenners wird für große Werte des Parameters σ_x klein. Ebenso wird die Varianz des Nenners für große Werte von w klein. Man kann daher den Nenner auch durch seinen Erwartungswert ersetzen und dies als Approximation des nichtlinearen Gauß-Filters auffassen. Die Berechnungen, welche für die Zufallsvariable $V_{p,w}$ durchgeführt wurden, werden nun für diese Approximation noch einmal durchgeführt. Es seien also wieder $Z_q, q \in \mathcal{P}\setminus\{p\}$, unabhängige, standardisiert normalverteilte Zufallsvariablen. Der Grauwert im Pixel p nehme den festen Wert $w \in I\!R$ an. Statt

$$U_{p,w} = w - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{g(0)\psi(0) + \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\psi(Z_q-w)}$$

wird nun die Zufallsvariable

$$\tilde{U}_{p,w} \quad := \quad w - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{g(0)\psi(0) + \sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)E(\psi(Z_q-w))}$$

$$\begin{aligned} &= w - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{g(0)\psi(0)+\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t-w)\varphi(t)dt} \\ &= w - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{g(0)\psi(0)+\gamma_0\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} \end{aligned}$$

betrachtet.

Der Erwartungswert für $\tilde{U}_{p,w}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E(\tilde{U}_{p,w}) &= w - \frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} g(q-p)\sigma_z^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(t-w)\varphi(t)dt}{g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} \\ &= w - \frac{w\gamma_0(p)\frac{\sigma_z^2}{(\sigma_z^2+1)}\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}{g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)} \\ &= w - w\cdot\frac{\sigma_z^2}{(\sigma_z^2+1)}\frac{1}{1+\frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}} \qquad \left(\xrightarrow{\sigma_z\to 0^+} \quad w\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Da dieser Erwartungswert $E(\tilde{U}_{p,w})$ nichtlinear von σ_x abhängt, wird er für $\sigma_x = 0.75$ und $\sigma_x = 1.5$ in Abbildung 8 auf Seite 40 als Funktion von σ_z gezeigt. Die Kurven lassen sich durch ihren Wert bei $\sigma_z = 0$ den Werten w zuordnen.

Da $g(0)+\gamma_0(p) = \gamma(p)$ gilt, kann der Nenner in (19) abgeschätzt werden:

$$g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w) < g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\psi(0) = \gamma(p)\psi(0)$$

Durch Vergleich von $E(V_{p,w})$ und $E(\tilde{U}_{p,w})$ mit Hilfe der Formel (18) auf Seite 33 und (19) erhält man eine zu Lemma 4.16 analoge Aussage.

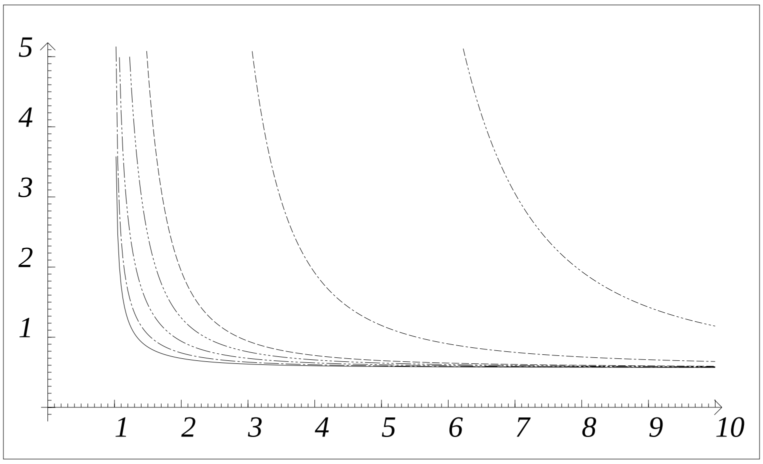
Bemerkung 4.24 *Durch die Ersetzung des Nenners durch seinen Erwartungswert gilt für* $w \in \mathbb{R}^+$: $0 < E(\tilde{U}_{p,w}) < E(V_{p,w}) < w$. *Nach Lemma 4.16 gilt dies auch für den Erwartungswert* $E(U_{p,w})$. *Die Erwartungswerte scheinen gut übereinzustimmen.*

Im Hinblick auf eine Iteration des Filters stellt sich die Frage, welches σ_z man wählen muß, damit der Erwartungswert $E(\tilde{U}_{p,w})$ die Hälfte von w beträgt. Die Werte werden nun berechnet und geben einen Anhaltspunkt, für welche Parameterwerte $E(U_{p,w})$ die Hälfte von w beträgt.

$$E(\tilde{U}_{p,w}) = \frac{w}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2} = \frac{\gamma_0(p)\frac{\sigma_z^2}{(\sigma_z^2+1)}\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}{g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad g(0)\psi(0) + \gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w) = 2\gamma_0(p)\frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1}\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w) \\
&\Leftrightarrow \quad g(0)\psi(0) = \gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w)\frac{2\sigma_z^2 - \sigma_z^2 + 1}{\sigma_z^2+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\psi(0)}{\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w)}\frac{\sigma_z^2+1}{\sigma_z^2-1} = \frac{\gamma_0(p)}{g(0)} = \frac{1-\mu_p g(0)}{\mu_p g(0)} = \frac{\sigma_x^2}{\mu_p\varphi(0)} - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sigma_x^2 = \mu_p\varphi(0)\left[\frac{\psi(0)}{\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w)}\frac{\sigma_z^2+1}{\sigma_z^2-1} + 1\right] \\
&\Rightarrow \quad \sigma_x^2 \geq \mu_p\varphi(0)\frac{\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(0)}{\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+2}}(w)} = \mu_p\frac{1}{2\pi}e^{\frac{1}{2}\frac{w^2}{\sigma_z^2+1}} =: h_2(\sigma_z, w)
\end{aligned}
$$

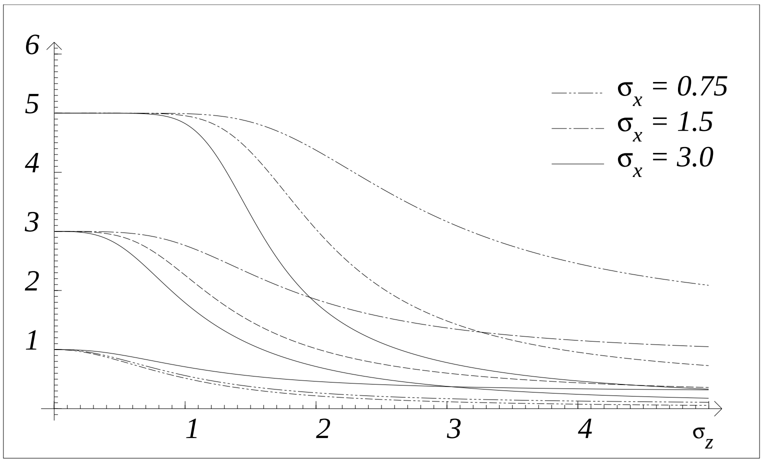
Mit der Gleichung $E(\tilde{U}_{p,w}) = \frac{w}{2}$ ist σ_x von w und σ_z abhängig. Für einige Werte w wird σ_x nun in Abhängigkeit von σ_z gezeichnet.



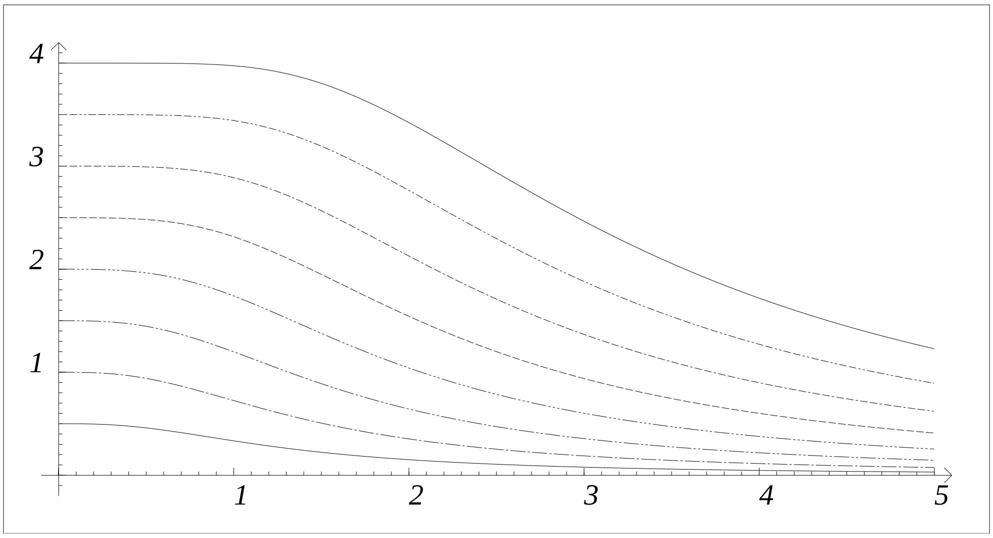
$\sigma_z \mapsto h_2(\sigma_z, w), w = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 10.0, 20.0$

Bemerkung 4.25 *Es zeigt sich, daß man bei diesem Operator mit kleineren Werten für σ_z auskommt, als bei $\tilde{G}$, welcher auf die Zufallsvariable $V_{p,w}$ geführt hat. Gerade bei großen Werten für σ_x nimmt die Varianz des Nenners stark ab, so daß gerade dann die gezeigten Werte das Verhalten des Filters G_{σ_x,σ_z} gut beschreibt.*

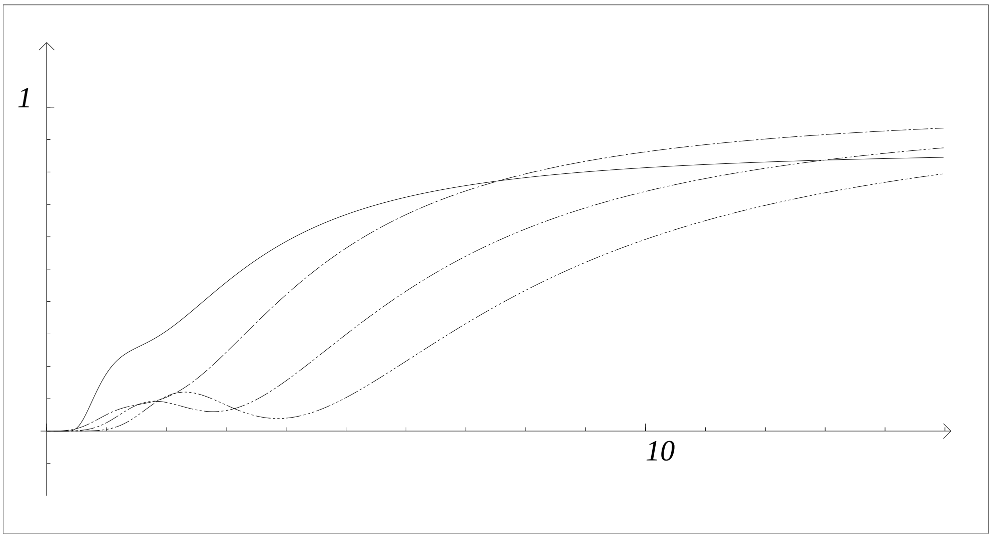
In dem folgenden Graphen sieht man sehr schön, daß ab einer bestimmten Filtergröße eine weitere Vergrößerung der Filterumgebung nicht mehr viel nützt. Es wird der bedingte Erwartungswert für verschiedene Werte sowohl für σ_x als auch für w gezeigt. Wegen $\lim_{\sigma_z \to 0} E(\tilde{U}_{p,w}) = w$ findet man sich im folgenden Diagramm leicht zurecht. Der bedingte Erwartungswert ist für $w \in \{1, 3, 5\}$ und $\sigma_x \in \{0.75, 1.5, 3.0\}$ als Funktion auf σ_z berechnet worden:



$\sigma_z \mapsto E(\tilde{U}_{p,w}), w = 1.0, 3.0, 5.0$

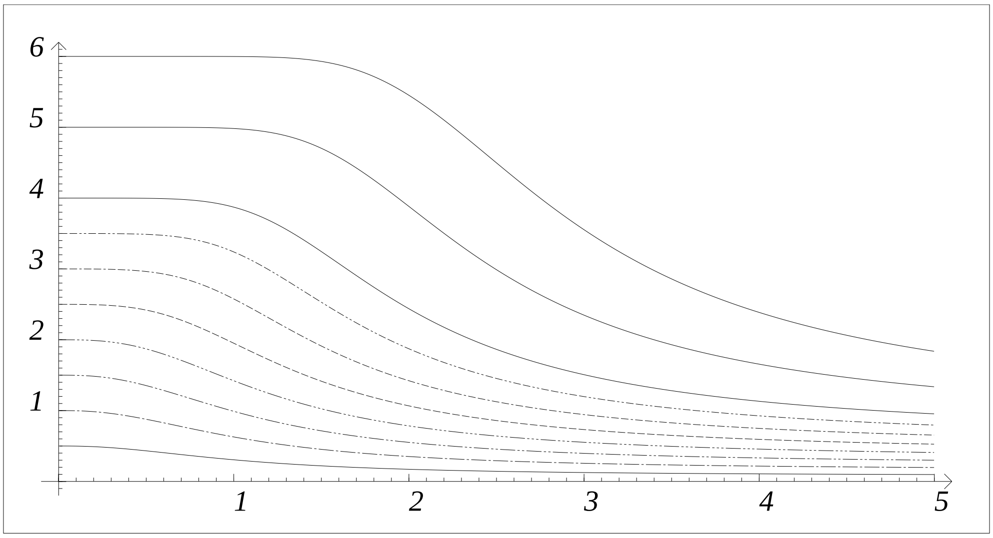


Zur Veranschaulichung von $E(V_{p,w})$ sind die Funktionen
$\sigma_z \mapsto w + \sigma_z^2 \varphi'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)$ für $w = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$ dargestellt.

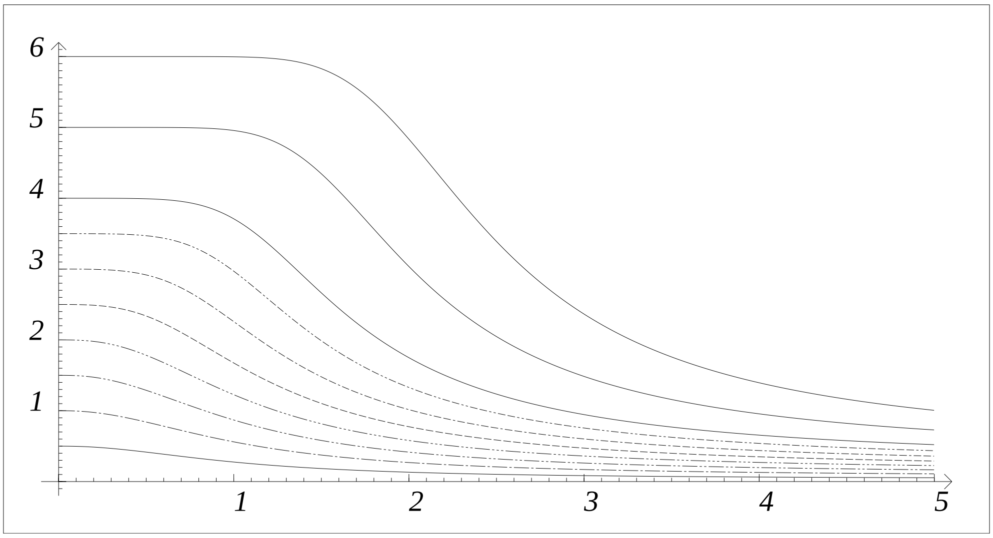


Als obere Schranke für die Varianzen $Var(V_{p,w})$ sind folgende Funktionen dargestellt:
$\sigma_z \mapsto \frac{1}{\psi(0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left((s-w)\psi(s-w) - \int_{\infty}^{\infty}(t-w)\psi(t-w)\varphi(t)dt\right)^2 \varphi(s)ds$ für $w = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$

Abbildung 7: Erwartungswerte und Varianzen der Zufallsvariablen $V_{p,w}$



$\sigma_z \mapsto E(\tilde{U}_{p,w})$ für $w = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0,\quad \sigma_x = 0.75$



$\sigma_z \mapsto E(\tilde{U}_{p,w})$ für $w = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0,\quad \sigma_x = 1.5$

Abbildung 8: Erwartungswerte der Zufallsvariablen $\tilde{U}_{p,w}$

4.2 Verstärkung der Filterwirkung

Definition 4.26 (Das nichtlineare Gauß-Filter) *Die Darstellung (3) auf Seite 17 erlaubt die Filterwirkung mit Hilfe eines Faktors zu verstärken. Die Definition des nichtlinearen Gauß-Filters wird nun um den Faktor η erweitert.*

$$G_{\sigma_x,\sigma_z,\eta}f(p) \;:=\; f(p)+\eta\sum_{q\in\mathcal{P}}\frac{1}{N_p}\,g(p-q)\psi(f(q)-f(p))\cdot(f(q)-f(p))$$

Analog wird nun die Definition der Zufallsvariablen $\tilde{U}_{p,w}$ um den Faktor η erweitert:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{p,w} &= w-\eta\frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{g(0)\psi(0)+\gamma_0(p)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t-w)\varphi(t)dt}\\ &= w-\eta\frac{\sum_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}}g(q-p)\sigma_z^2\psi'(Z_q-w)}{\psi(0)+\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}\end{aligned}$$

Um die Wirkung des Faktors zu zeigen, werden in Abbildung 9 die Diagramme aus Abbildung 8 für $\eta = 1.3$ gezeigt. Wie man im Graphen sieht, wird mit dem Faktor η die Glättung verstärkt, ohne daß auf die Robustheit des Verfahrens verzichtet wird, da auch hier nur Pixel mit kleiner Grauwertdifferenz in die Glättung einbezogen werden.

Der Faktor sollte so gewählt werden, daß w und $E(\tilde{U}_{p,w})$ das gleiche Vorzeichen haben.

Die Einführung dieses Faktors ist nur durch die Zerlegung der Formel in die Summe aus dem Grauwert $f(p)$ und dem Term für die Glättung möglich. Auch einige Filter der Literatur machen die Gewichte der Filterung von Grauwertdifferenzen abhängig, vgl. [Fle92b, WVL81, SMCM91, Lee83]. Keines dieser Filter ist jedoch in dieser Form zerlegt worden, so daß auch ein solcher Faktor noch nicht eingeführt wurde. Ich denke, daß einige Verfahren der Literatur mit weniger Iterationsschritten auskommen würden, wenn man sie analog darstellt und um den Parameter η ergänzt.

Lemma 4.27 (Wahl des Faktors η) *Ist das Rauschen standardisiert normalverteilt, so besitzt für*

$$\eta \leq \frac{\sigma_z^2+1}{\sigma_z^2}$$

der Wert w und $E(\tilde{U}_{p,w})$ das gleiche Vorzeichen.

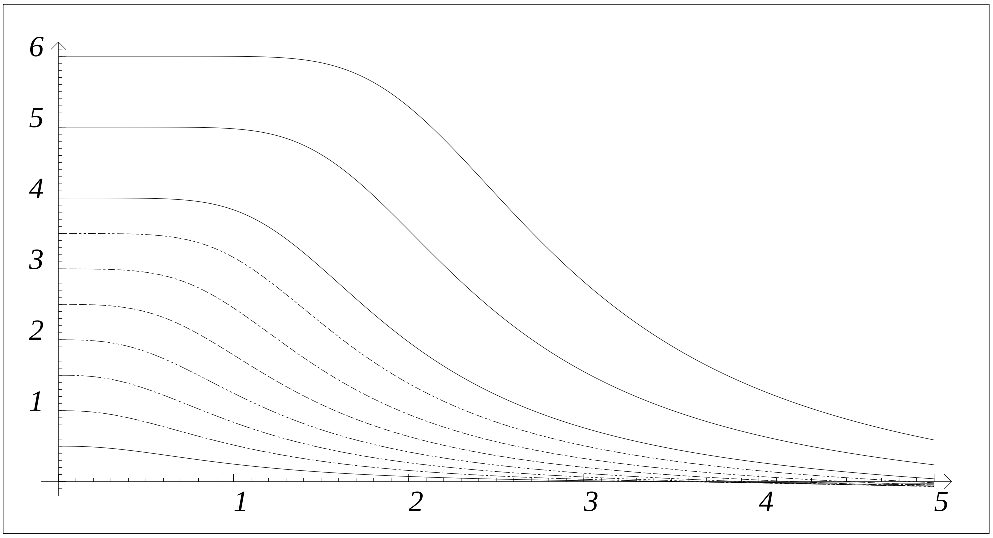
Beweis:

$$0 \;\leq\; w\cdot E(\tilde{U}_{p,w})$$

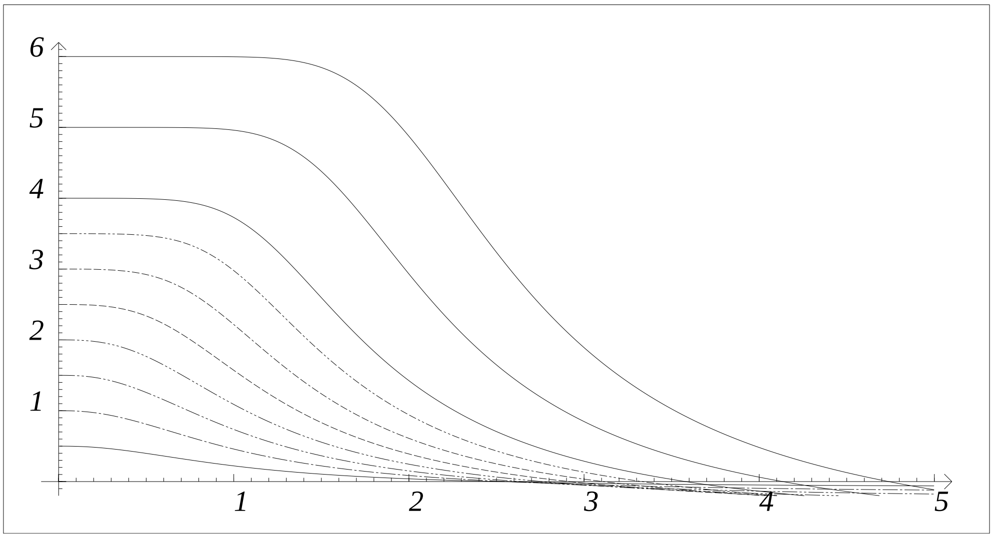
$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 \quad &\leq \quad w \cdot \left[w - w \cdot \eta \cdot \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}} \right] \\
\Leftrightarrow 0 \quad &\leq \quad w^2 \cdot \left[1 - \eta \cdot \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}} \right] \\
\Leftrightarrow 1 \quad &\geq \quad \eta \cdot \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(w)}} \\
\Leftarrow 1 \quad &\geq \quad \eta \cdot \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(0)}} \\
\Leftrightarrow \eta \quad &\leq \quad \frac{\sigma_z^2 + 1}{\sigma_z^2} \left[1 + \frac{g(0)\psi(0)}{\gamma_0(p)\varphi_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(0)} \right] \\
\Leftarrow \eta \quad &\leq \quad \frac{\sigma_z^2 + 1}{\sigma_z^2}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 4.28 *Ist σ_z doppelt so groß wie die Varianz des Rauschens, welche hier als* 1 *angenommen wurde, so sollte η kleiner als* 1.25 *gewählt werden. Entspricht σ_z der Varianz des Rauschens, so sollte η kleiner als 2 sein. In der Praxis habe ich vielfach mit $\eta = 1.3$ gerechnet und gute Ergebnisse erzielt. Für großes σ_z muß der Faktor nahe 1 gewählt werden, so daß die Filterung einem linearen Gauß-Filter entspricht.*



$\sigma_z \mapsto E(\tilde{U}_{p,w})$ für $w = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0, \quad \sigma_x = 0.75, \quad \eta = 1.3$



$\sigma_z \mapsto E(\tilde{U}_{p,w})$ für $w = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0, \quad \sigma_x = 1.5, \quad \eta = 1.3$

Abbildung 9: Erwartungswerte der Zufallsvariablen $\tilde{U}_{p,w}$

4.3 Spezielle Bilder

Da die folgenden Betrachtungen für Bilder ohne Rauschen durchgeführt werden, wird eine eindimensionale Version des Filters verwendet. Zur Vereinfachung wird mit einer kontinuierlichen Version des nichtlinearen Gauß-Filters gearbeitet, welche nun bereitgestellt wird.

Definition 4.29 (Kontinuierliche Version des nichtlinearen Gauß-Filters) *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so daß*

$$Gf(x) := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s-x)\psi(f(s)-f(x))f(s)ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s-x)\psi(f(s)-f(x))ds}$$

existiert, so bezeichnet G gleichzeitig diese kontinuierliche Version des nichtlinearen Gauß-Filters.

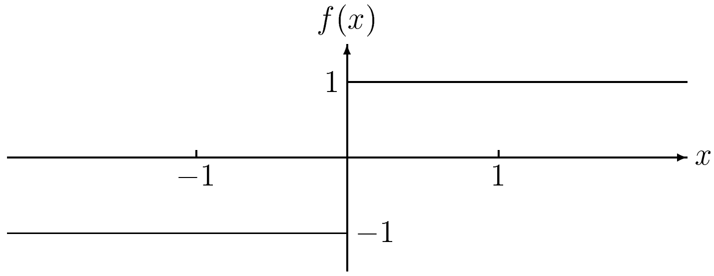
Für die kontinuierliche Version gelten die Identitäten aus Lemma 4.7. Wegen $\varphi_{\sigma_x}(\alpha x) = \alpha\varphi_{\frac{\sigma_x}{\alpha}}(x)$ gilt zusätzlich das folgende

Korollar 4.30 (Identität der kontinuierlichen Version) *Für $c \in \mathbb{R}$ bezeichne $\Phi_c : x \mapsto \frac{1}{c}x$ die Division durch c. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $Gf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert, so gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$G_{\alpha\sigma_x,\sigma_z}[f \circ \Phi_\alpha] = [G_{\sigma_x\sigma_z} f] \circ \Phi_\alpha$$

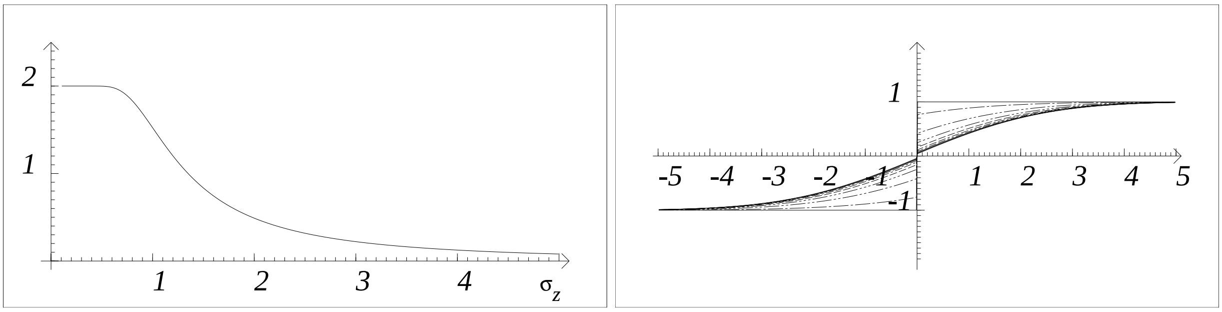
Zunächst wird nun eine Kante betrachtet. Die Kante sei durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



gegeben. Nach der Filterung erhält man die Funktion $Gf(x)$ mit

$$\begin{aligned}
x < 0: \quad Gf(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(0)\cdot 0\ ds + \int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(2)\cdot 2\ ds}{\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(0)\ ds + \int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(0)\ ds} - 1 \\
&= 2 \cdot \frac{\int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(2)\ ds}{\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(0)\ ds + \int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(2)\ ds} - 1 \\
x > 0: \quad Gf(x) &= -2 \cdot \frac{\psi(2)\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\ ds}{\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(2)\ ds + \int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\psi(0)\ ds} + 1 \\
&= -2 \cdot \frac{\psi(2)\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\ ds}{\psi(2)\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{\sigma_x}(s)\ ds + \psi(0)\int_{-x}^{\infty} \varphi_{\sigma_x}(s)\ ds} + 1
\end{aligned}$$



Die Sprunghöhe nach der Filterung als Funktion von σ_z

Profile von f und Gf nach einer Filterung mit $\sigma_x = 1.0$ und $\sigma_z \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0\}$

Abbildung 10: Filterergebnis einer Kante

Für den Grenzwert $x \to 0$ kann man $\int_{-\infty}^{0} g(s)ds$ kürzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} Gf(x) &= \frac{2\cdot\psi(2)}{\psi(0)+\psi(2)} - 1 = \frac{\psi(2)-\psi(0)}{\psi(2)+\psi(0)} \\
\lim_{x\to 0^+} Gf(x) &= 1 - \frac{2\cdot\psi(2)}{\psi(0)+\psi(2)} = \frac{\psi(0)-\psi(2)}{\psi(0)+\psi(2)}
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.31 *Die Funktion Gf ist also immer unstetig. Es ergibt sich in Abhängigkeit von σ_z die Sprunghöhe*

$$\lim_{x\to 0^+} Gf(x) - \lim_{x\to 0^-} Gf(x) = 2\cdot\frac{\psi(0)-\psi(2)}{\psi(0)+\psi(2)}$$

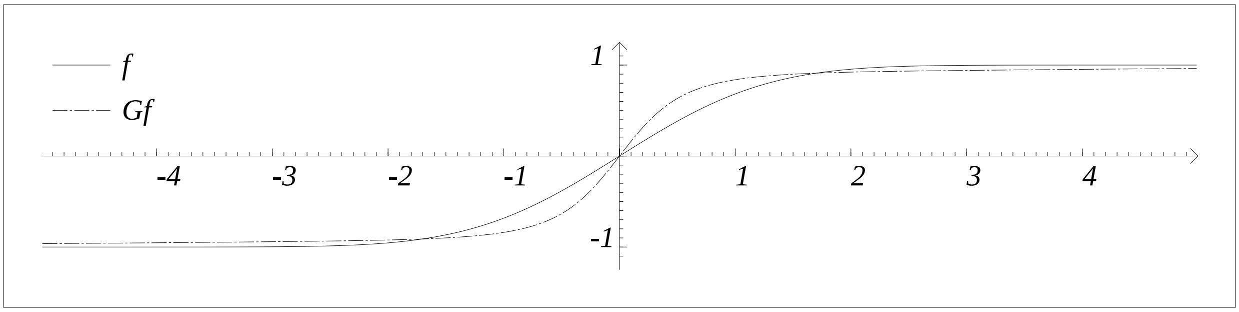
Der linke Graph in Abbildung 10 zeigt, wie die Sprunghöhe mit wachsendem σ_z abnimmt. Um einen Eindruck der Filterresultate zu geben wird in dieser Abbildung im rechten Graphen f und Gf für verschiedene Parameter gezeigt.

Bemerkung 4.32 *Man sieht: Ist der Parameter σ_z doppelt so groß wie die Sprunghöhe der Kante, so ergibt eine weitere Vergrößerung der Parameters σ_z keinen wesentlichen Unterschied im Filterergebnis. Möchte man Kanten einer bestimmten Höhe erkennen, so sollte man das σ_z ungefähr halb so groß wie die Kante wählen, damit ein Sprung übrig bleibt.*

Nun wird die Wirkung des Filters auf eine unverrauschte Rampe untersucht. Ist im Bild ein relativ flacher Übergang von einer Grauwertfläche zu einer anderen zu sehen, so wird der Übergang durch das Filter mit den richtigen Parameterwerten leicht versteilert. Dieser Effekt wird nun an einer ungeraden Funktion gezeigt.

Bemerkung 4.33 *Es sei Φ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, f die Funktion $x \mapsto 2\Phi(x) - 1$. In dem folgenden Graphen ist diese Funktion f und Gf*

für $\sigma_z = 0.5$ und $\sigma_x = 3$ zu sehen, wobei Gf mit der stetigen Variante des nichtlinearen Gauß-Filters berechnet wurde; die steilere Linie im Graphen zeigt die Funktion Gf. Diese Versteilerung hängt vom Parameter σ_z ab und kann für ungerade, monoton wachsende, zweimal stetige differenzierbare Funktionen gezeigt werden.



Das beobachtete Verhalten ist für die Iteration interessant. Im nächsten Kapitel wird sich die Versteilerung als hilfreich erweisen, Kanten auch bei viel Rauschen gut zu erhalten. Das folgende Lemma kann mit Hilfe der Identitäten auf Rampen mit anderer Sprunghöhe und Steigung umgerechnet werden.

Lemma 4.34 (Versteilerung) *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ eine ungerade, stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung überall positiv ist und in Null ein globales Maximum besitzt. Ist σ_z größer als 1, so ist die Ableitung von Gf in Null kleiner als die von f, und die Funktion wird flacher. Nur mit σ_z kleiner als 1 kann für f eine Versteilerung erreicht werden, welche dann auch von σ_x abhängt.*

Beweis: Als Merkmal der Versteilerung wird die Ableitung von Gf in Null berechnet. Da der Nenner eine gerade Funktion ist, ist die Ableitung des Nenners im Punkt Null auch Null:

$$\begin{aligned} N(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\psi(f(t)-f(x))dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(-t-x)\psi(f(-t)-f(x))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(-t-x)\psi(-f(t)+f(-x))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t+x)\psi(f(t)-f(-x))dt \\ &= N(-x) \end{aligned}$$

Ist $Z(x)$ der Zähler des Bruches in der Formel von $Gf(x)$, also

$$Gf(x) = f(x) + \frac{Z(x)}{N(x)}$$

so gilt mit $N'(0) = 0$ und der Quotientenregel:

$$[Gf]'(0) = f'(0) + \frac{Z'(0)N(0) - Z(0)N'(0)}{N(0)^2} = f'(0) + \frac{Z'(0)}{N(0)}$$

Es gilt damit:

$$[Gf]'(0) = f'(0) + \frac{\frac{d}{dx}_{|x=0} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(x))g(t-x)\psi(f(t) - f(x))dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t-0)\psi(f(t) - f(0))dt}$$

Für den Zähler ergibt sich mit den Identitäten der Gauß-Funktionen und der partiellen Integration:

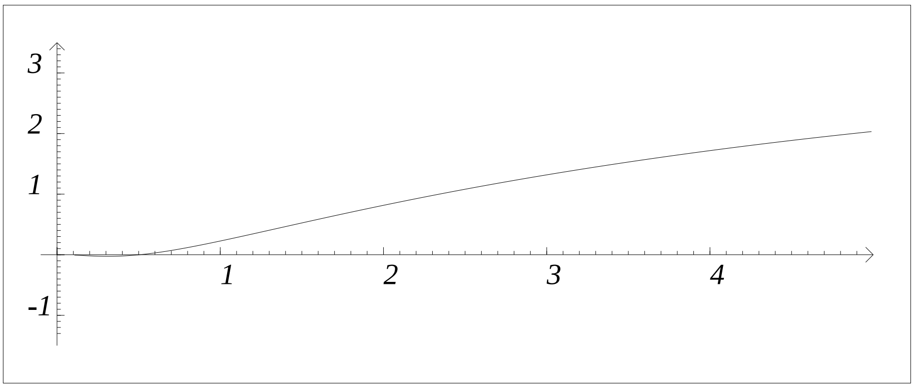
$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}_{|x=0} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(x))g(t-x)\psi(f(t) - f(x))dt \\
= \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx}_{|x=0} (-\sigma_z^2) g(t-x)\psi'(f(t) - f(x)) \right] dt \\
= \quad & -\sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)(-1) \cdot \psi'(f(t))\, dt \; - \; \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \psi''(f(t))(-f'(0))\, dt \\
= \quad & -\sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \psi''(f(t))(f'(t))\, dt \; + \; \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \psi''(f(t))(f'(0))\, dt \\
= \quad & \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (f'(0) - f'(t))g(t)\psi''(f(t))\, dt \\
= \quad & \int_{-\infty}^{\infty} (f'(0) - f'(t)) \;\; g(t) \;\; \psi(f(t)) \quad \left[\left(\frac{f(t)}{\sigma_z} \right)^2 - 1 \right] dt
\end{aligned}$$

Für die gesuchte Ableitung gilt nun:

$$[Gf]'(0) = f'(0) + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f'(0) - f'(t)) \;\; g(t) \;\; \psi(f(t)) \quad \left[\left(\frac{f(t)}{\sigma_z} \right)^2 - 1 \right] dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \;\; g(t) \;\; \psi(f(t)) \;\; dt} \tag{20}$$

Da die Funktion f in Null die größte Ableitung besitzt, ist der Term $(f'(0) - f'(t))$ immer größer Null. Mit $\sigma_z > ||f||_\infty$ wird der Zähler also immer negativ und die Ableitung verkleinert, die Funktion Gf ist nicht steiler als f. Für geeignete Funktionen f ist der Zähler bei kleinem σ_z und geeignetem Wert für σ_x positiv und die Funktion Gf ist in der Stelle Null steiler als f, wie im Beispiel oben gezeigt wurde. □

Bemerkung 4.35 *In Lemma 4.34 ist nur das Vorzeichen von $[Gf]'(0) - f'(0)$ betrachtet worden. Würde man die kontinuierliche Version um den Faktor η analog Abschnitt 4.2*



$[Gf]'(0) - f'(0)$ für $\sigma_z = 0.5$ und $f(x) = 2\Phi(x) - 1$ als Funktion von σ_x.

Abbildung 11: Versteilerung von Rampen

erweitern, so bleibt dieses Vorzeichen unabhängig vom Wert des Faktors η gleich. Damit gilt das Lemma 4.34 auch für eine kontinuierliche Version des Filters, welche einen Parameter η enthält.

Für die Stammfunktion der Gauß-Funktion $\Phi(x)$ ist Lemma 4.34 schon in [SMCM91] für das σ-Filter behauptet und auf einem anderen Weg begründet worden. In dieser Arbeit wurde jedoch keine Formel angegeben. Im Anhang wird für die Berechnung der Formel nur benutzt, daß ψ eine gerade Funktion ist.

Bemerkung 4.36 *Für die Funktion $x \mapsto 2 \cdot \Phi(x) - 1$ wird in Abbildung 11 $[Gf]'(0) - f'(0)$ mit $\sigma_z = 0.5$ gezeigt. Die Werte werden als Funktion von σ_x aufgetragen. Man erkennt, wie mit wachsendem σ_x die Versteilerung der Rampe zunimmt.*

4.4 Zusammenfassung

Unter gewissen Annahmen ist das nichtlineare Gauß-Filter ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert der Grauwerte. Die Erwartungswerte der Schätzungen eines sehr ähnlichen Schätzers erwiesen sich als lokal Lipschitz-stetig auf der Menge der beliebig oft differenzierbaren Verteilungsfunktionen. Wegen der engen Beziehung dieser beiden Schätzer wird auch das nichtlineare Gauß-Filter *robust* genannt. Gleichzeitig wurde in Bemerkung 3.3 auf die Resistenz des Filter hingewiesen, d.h. daß große Änderungen von einzelnen Grauwerten in der Umgebung eines Pixels den Grauwert dieses Pixels im gefilterten Bild kaum verändert.

Es ist damit gerechtfertigt, die Untersuchungen bezüglich Rauschen mit Hilfe der Normalverteilung durchzuführen, da diese der Verteilung des Rauschens auf den Bilder nahe kommt. Für den Fall, daß der Grauwert eines Pixels im Bild bekannt ist und die Grauwerte in der Umgebung des Pixels unabhängig standardisiert normalverteilt sind, wurden Formeln für den Erwartungswert sehr ähnlicher Operatoren angegeben, welche das nichtlineare Verhalten des nichtlinearen Gauß-Filters demonstrieren.

Für die Iteration des nichtlinearen Gauß-Filter ist die Wirkung des Filters auf Rauschen, Kanten und steile Rampen wichtig. Es wurde gezeigt, wie das nichtlineare Gauß-Filter Rampen zum Teil steiler werden läßt. Kanten bleiben nur dann erhalten, wenn das σ_z kleiner als die halbe Kantenhöhe ist. Zur Versteilerung von Rampen muß auch der Parameter σ_x eine gewisse Größe haben.

Durch Einführen des Faktors η wird das nichtlineare Gauß-Filter leicht modifiziert, so daß η eine Verstärkung der Filterwirkung angibt. Die Wahl des Wertes von η setzt aber die Kenntnis vom Verhältnis der Standardabweichung des Rauschens und des Parameters σ_z voraus.

5 Die Gauß-Filterkette

5.1 Iteration von nichtlinearen Filtern

Wie beim nichtlinearen Gauß-Filter ist bei vielen Filtern das Rauschen im Bild nach einer Filterung noch nicht ganz verschwunden. Zur Untersuchung solcher Filter ist daher oft auch die Iteration betrachtet worden, vgl. [SMCM91], [Fle92b], [WVL81]. M.M. Fleck hat bei der Iteration den Parameter, welcher vom Rauschen abhängt, lokal im Bild an das Rauschen angepaßt. Ist das Rauschen und die Wirkung des Filters bekannt, so können die Parameterwerte der Filter in jedem Schritt entsprechend gewählt werden. Unter der Annahme, das Rauschen auf dem Bild sei überall gleich, ist es möglich, die Parameter an das Bild anzupassen.

Es wurde in keiner mir bekannten Arbeit darauf eingegangen, daß Kanten, welche im Bild oft als steile Rampen zu sehen sind, sich während der Filterung in ihrem Profil verändern. In Bemerkung 4.36 ist in dem Zusammenhang der Versteilerung der Rampen und des Parameters σ_x des nichtlinearen Gauß-Filters hingewiesen worden. Die Veränderung der Filterumgebung $U(p)$ bzw. des Parameters σ_x ist daher auch während der Iteration notwendig. Ist die Kantenhöhe einer Kante kleiner als die Standardabweichung des Rauschens, so wird bei einer Filterung neben der Glättung des Rauschens auch die Kante zu einer Rampe verformt. Es liegt nahe, in weiteren Filterschritten einer weiteren Glättung des Profils der Rampe entgegenzuwirken.

Für die nichtlinearen Filter ist mir nur Literatur bekannt, in welcher die Iteration mit gleichem Parameterwert für die Größe der Filterumgebung untersucht wird. Im folgenden wird gezeigt, daß gerade eine schrittweise Veränderung der Filtergröße Kanten gut hervortreten läßt. Die Genauigkeit der Lokalisation von Kanten hängt damit vom Rauschen in der Nähe der Kante ab.

5.2 Filterketten als Operatoren

Es sollen nun die Parameter des nichtlinearen Gauß-Filters in jedem Filterschritt gezielt verändert werden. Es wurden auf vielen Bildern die unterschiedlichsten Parameterwerte getestet. Am besten wirkte die folgende Vorgehensweise:

Definition 5.1 (Gauß-Filterkette) *Für σ_x, σ_z, $\eta \in I\!R^+$ heißt die dreimalige Verwendung des nichtlinearen Gauß-Filters gemäß*

$$G_{2\sigma_x,\frac{1}{2}\sigma_z,\eta} \circ G_{\sigma_x,\sigma_z,\eta} \circ G_{\frac{1}{2}\sigma_x,2\sigma_z,\eta}$$

Gauß-Filterkette. *Der Parameter σ_x wird bei dieser Methode schrittweise größer und der Parameter σ_z immer kleiner. In den folgenden Untersuchungen gilt oft $\eta = 1$, in diesem Fall wird auf die Angabe von η verzichtet und die Gauß-Filterkette kurz mit $G \circ G_{\sigma_x,\sigma_z} \circ G$*

bzw. GGG bezeichnet. Die einzelnen Filterungen mit dem nichtlinearen Gauß-Filter werden Filterschritte *genannt.*

Ist das Rauschen im Bild größer als die Intensitätsänderung der Grauwerte an einer Kante, so kann man mit einer solchen Filterkette

- im **ersten Filterschritt** mit kleinem σ_x das Rauschen leicht glätten, ohne die Kante zu sehr zu verändern,
- im **zweiten Filterschritt** weiter glätten und mit gemäßigtem σ_z die Kante weitgehend erhalten, um dann
- im **dritten Filterschritt** mit kleinem σ_z und großem σ_x das restliche Rauschen zu glätten und die Kante stark hervortreten zu lassen.

Mit diesem Vorgehen erhält man ein Filter, welches im Bild Bereiche mit nahezu gleichem Grauwert erzeugt und Kanten verstärkt. Soll nur das Rauschen geglättet werden, aber Rampen nicht versteilert, so sollte man höchstens zwei Filterschritte durchführen, wie die weiteren Betrachtungen zeigen werden.

Ist eine Kante im Bild gegenüber der Standardabweichung der Rauschens klein, so nehmen wir einmal an, die Kante hätte nach den ersten zwei Filterschritten in etwa ein Profil, als wäre sie mit zwei linearen Gauß-Filtern gefiltert worden. Diese linearen Gauß-Filter entsprechen einem linearen Gauß-Filter der Varianz $\sqrt{\frac{1}{4}+1}\cdot\sigma_x$. Ist das Rauschen nach diesen ersten beiden Filterschritten viel kleiner als die Rampenhöhe, so kann mit Hilfe der Identitäten 4.7 aus Abbildung 11 auf Seite 48 abgelesen werden, daß der dritte Filterschritt der Gauß-Filterkette bei entsprechend kleinem Wert für σ_z die Rampe wieder steiler werden läßt. Im folgenden wird dieses Verhalten genauer untersucht.

Bemerkung 5.2 (Anzahl der Filterschritte) *Da im ersten Filterschritt der Parameter σ_x schon etwas größer als $\frac{1}{2}$ sein muß, damit dieser Filterschritt etwas bewirkt, ist das σ_x im letzten Filterschritt größer als* 3*. Für die meisten Bilder ist dies schon recht groß, so daß ein vierter Filterschritt nicht mehr sinnvoll erscheint.*

Diese Filterung wird im weiteren untersucht. Um den Effekt der Veränderung von Kanten zu zeigen, wird die Wirkung der Filterkette zunächst für eine Kante ohne Rauschen untersucht.

5.3 Die Wirkung auf unverrauschte Kanten

Es wird nun die Wirkung der Filterkette auf unverrauschte Kanten betrachtet. Da die Kante kein Rauschen enthält, kann die Filterung im eindimensionalen untersucht werden, vgl. Lemma 3.5. Als Modell für die Kante wird die Funktion $f(x) = 4\chi_{[0,\infty[}$ verwendet, welche an den Stellen $\ldots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, \ldots$ abgetastet wird. Diese Abtastung ist mit verschiedenen Parametern gefiltert worden, wobei eine eindimensionale Version des nichtlinearen Gauß-Filters verwendet wurde. Für einige Parameter wird in den Abbildungen 12 bis 14 die Ausgabe der Filterkette gezeigt. Die angegebenen Werte sx und sz beziehen sich auf die Parameter σ_x bzw. σ_z der Gauß-Filterkette. Der Wert des Differenzenquotienten im Punkt Null ist für die Ausgabe der verschiedenen Filterschritte angegeben. Die durchgezogene Linie ist die Funktion f, die Anzahl der Punkte in den unterbrochenen Linien wächst mit der Anzahl der Filterschritte, so daß die Linie, welche mit je drei Punkten unterbrochen ist, das Ergebnis der Filterung mit $G \circ G_{\sigma_x,\sigma_z} \circ G$ zeigt.

In Abbildung 12 werden die Funktionen für verschiedene Werte des Parameters σ_x gezeigt. Dabei sieht man, wie die Kante bei der ersten Filterung flacher wird, in der zweiten Filterung auch noch ein bißchen flacher, um dann nach der dritten Filterung wieder steiler zu werden. Nun kann mit einfachen Verfahren die Kante erkannt werden. Man sieht, daß sich Filterergebnisse gemäß der Identität 4.30 der kontinuierlichen Version verhalten. Es ist daher wesentlich interessanter, das Verhalten des Filters bezüglich σ_z zu betrachten.

Würde die Filterung im zweidimensionalen durchgeführt, so würde man mit $\sigma_x = 2.0$ schon sehr viel Rauschen glätten, wie im nächsten Abschnitt zu sehen ist.

Bemerkung 5.3 *In Abbildung 12 ist die Kante im dritten Filterschritt deutlich zu sehen, obwohl in der ersten Filterung ein σ_z von der Höhe der Kante gewählt wurde. Damit stimmt das Verhalten auch im diskreten mit den Ergebnis aus Lemma 4.34 auf Seite 46 überein.*

In den Abbildungen 13 und 14 werden die Funktionen für verschiedene Parameterwerte σ_z gezeigt. In jedem diesem Fälle ist die Funktion $G_{\sigma_x,\sigma_z} \circ Gf$ flacher als Gf. Übersteigt σ_z die halbe Kantenhöhe, so wird die Funktion in der dritten Filterung noch flacher. Man erkennt deutlich, wie man den Parameter σ_z im Hinblick auf die gesuchte Kantenhöhe einstellt.

Bemerkung 5.4 (Erhaltung von Kanten) *Der Parameter σ_z der Gauß-Filterkette sollte kleiner als die halbe Kantenhöhe sein, wenn diese Kante als steile Rampe erhalten bleiben soll.*

Die Abbildung 15 zeigt Graphen welche analog zu denen aus Abbildung 13 berechnet wurden. Der Parameter η der Gauß-Filterkette wurde hier mit 1.5 belegt. Die Kante wird in den gezeigten Graphen im ersten Filterschritt zu einer Rampe, welche dann im letzten Filterschritt wieder versteilert wird. Die Wirkung des Parameters η hebt sich in diesen Filterungen weitgehend auf. Da mit größerem Parameterwert für η aber das Rauschen besser geglättet wird, kann auf diesen Parameter der Gauß-Filterkette nicht verzichtet werden.

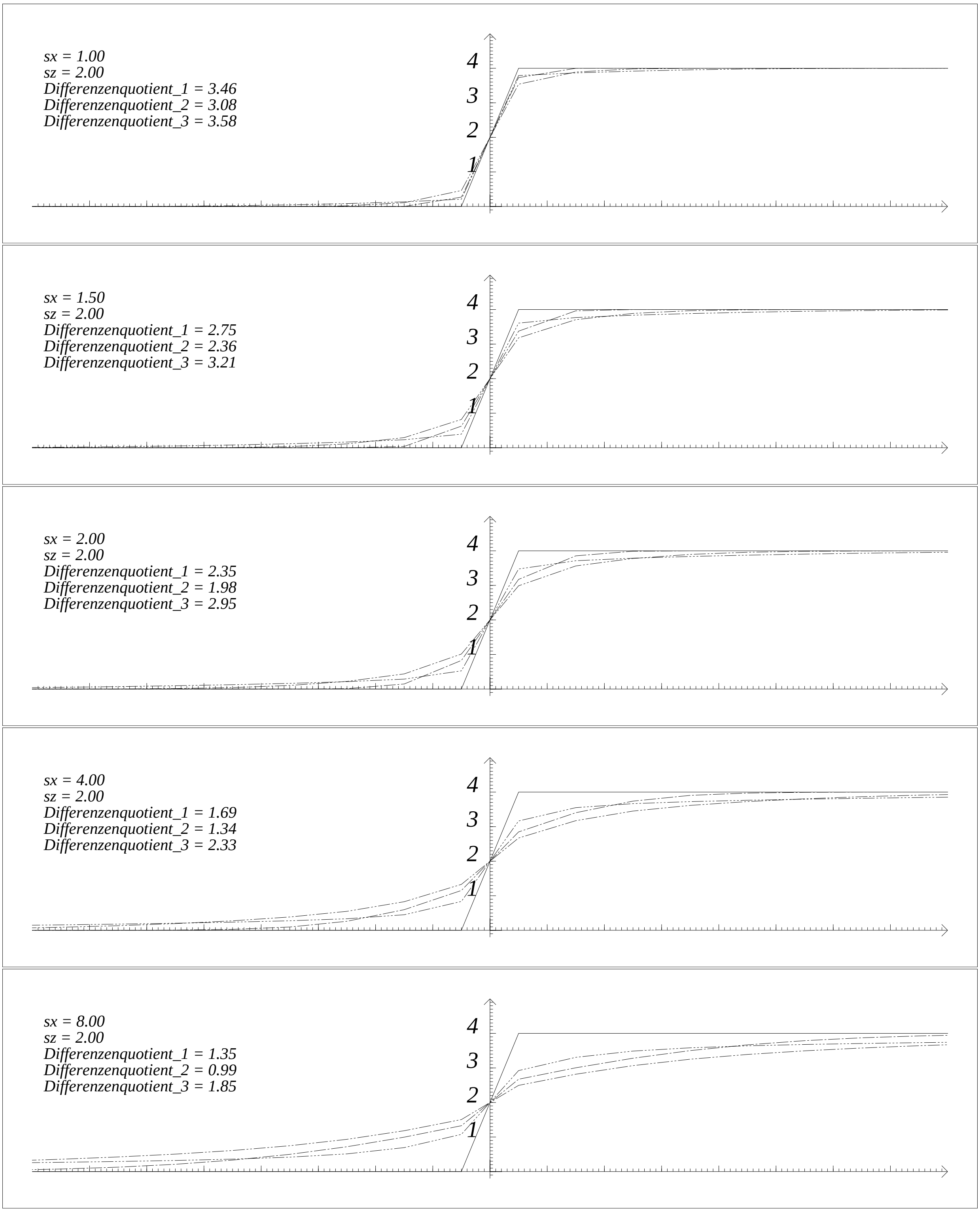


Abbildung 12: Versteilerung mit verschiedenen Parametern σ_x

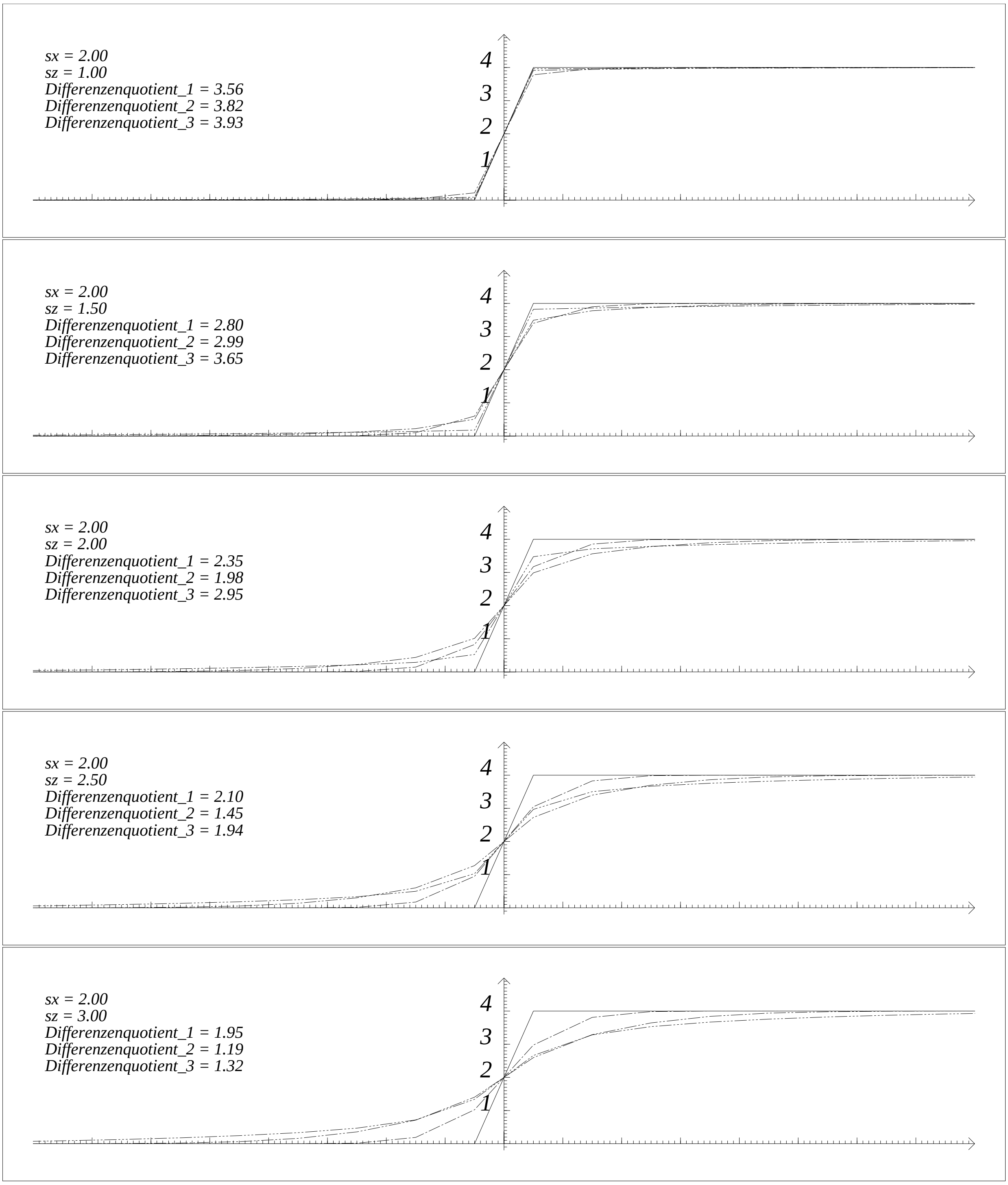


Abbildung 13: Versteilerung mit verschiedenen Parametern σ_z

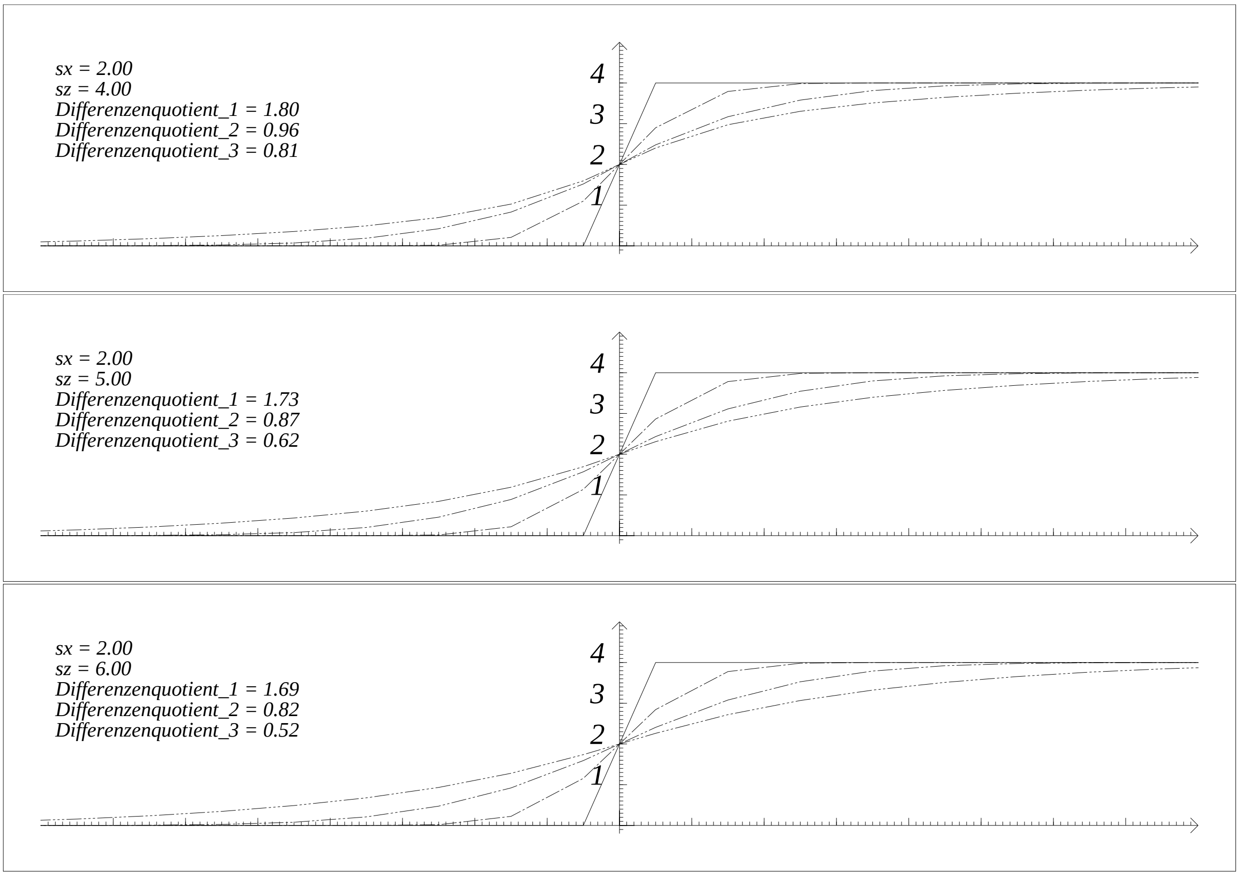


Abbildung 14: Versteilerung mit verschiedenen Parametern σ_z

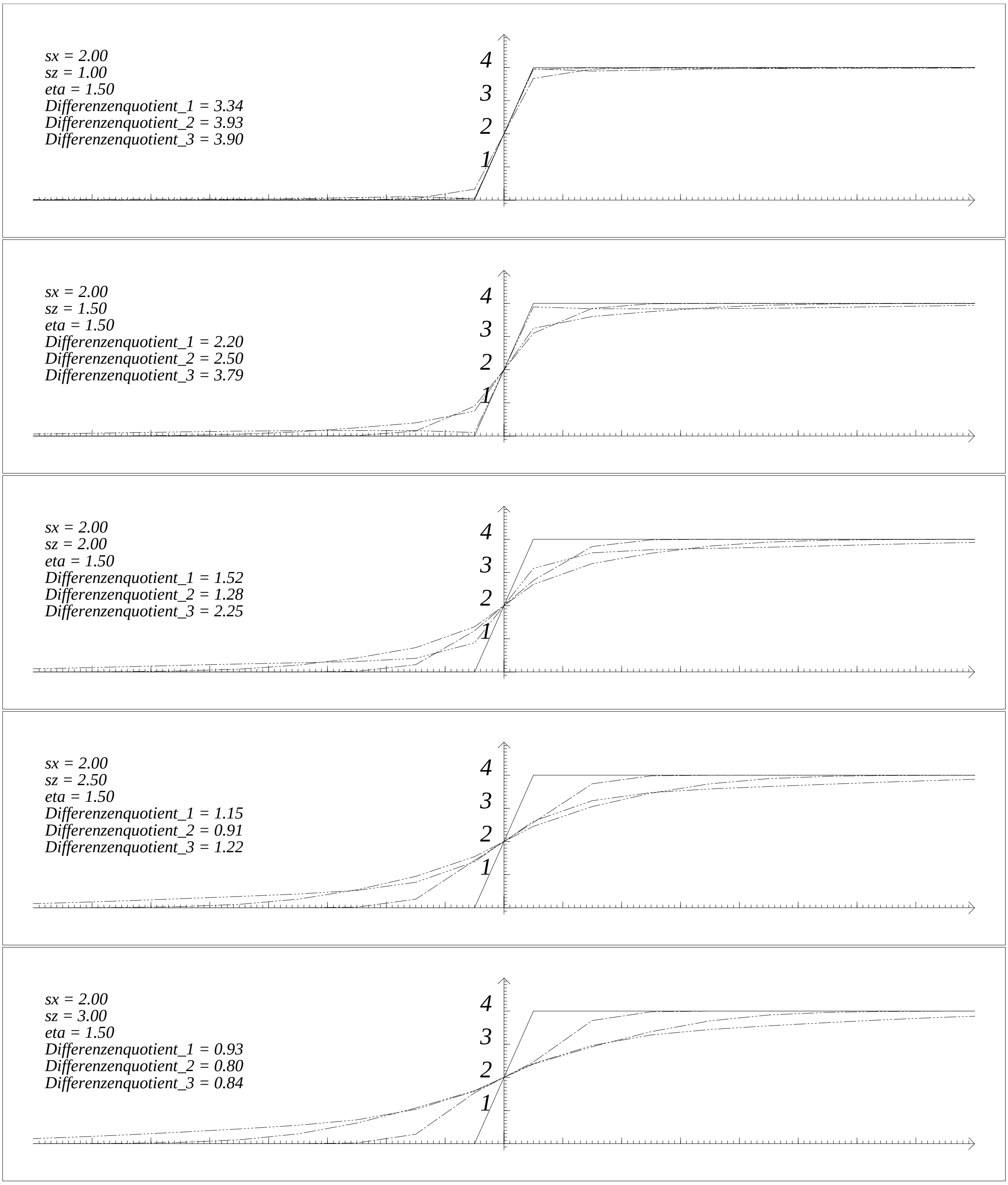


Abbildung 15: Versteilerung mit verschiedenen Parametern σ_z und $\eta = 1.5$

5.4 Die Wirkung auf verrauschte Flächen

In Definition 4.9 sind die Begriffe „verrauschte Fläche“ und „Gaußschen Rauschen“ eingeführt worden. Für eine verrauschte Fläche mit Gaußschen Rauschen wird nun die Dichtefunktion der Grauwerte nach einer Filterung mit der Gauß-Filterkette ermittelt. Aufgrund der Identitäten 4.7 können die Zufallsvariablen als standardisiert normalverteilt angenommen werden.

Nach Bemerkung 4.11 erhält man aus den unabhängig standard normalverteilten Zufallsvariablen $(Z_p)_{p\in\mathcal{P}}$ mit Hilfe des nichtlinearen Gauß-Filters Zufallsvariablen $(U_p)_{p\in\mathcal{P}}$, welche im allgemeinen abhängig sind. Um die Dichtefunktionen dieser Zufallsvariablen zu ermitteln, wurde ein Testbild mit Gaußschem Rauschen erzeugt und gefiltert. Auch für die Grauwerte nach dem zweiten und dritten Filterschritt wurden die Dichtefunktionen ermittelt. Dazu wurde die Verteilungsfunktion nach den einzelnen Filterschritten abgetastet und mit Hilfe von Differenzenquotienten die Dichtefunktion approximiert. Die Ermittelung von relativen Häufigkeiten nach einer geeigneten Quantisierung der Grauwerte würde zu den gleichen Werten führen.

Um das Testbild zu erzeugen, standen zwei Pseudo-Zufallszahlengeneratoren zur Verfügung, welche nach Handbuch verschiedene Güte haben. Beide Generatoren liefern ganze Zahlen zwischen 0 und $2^{31}-1$. Die Standard ANSI C Bibliothek enthält die Funktion *rand()*, welche einen einfachen Generator darstellt. Mit BSD-Unix steht ein weiterer Generator *random()* zur Verfügung, welcher laut Handbuch bessere Eigenschaften und eine größere Periodenlänge aufweißt. Es wurde daher der Generator *random()* verwendet. Aus den gleichverteilten Pseudo-Zufallszahlen wurden dann standard normalverteilte Pseudo-Zufallszahlen erzeugt und als Grauwerte des Testbildes abgelegt. Das so erzeugte quadratische Testbild enthielt in etwa eine viertel Million Pixel.

Zur Filterung wurde das Filter insofern modifiziert, daß die Funktion g für alle Pixeldifferenzen mit $\| q-p \|_\infty > 4\sigma_x$ Null liefert. Das Rauschen wird an den Bildrändern weniger geglättet als in der Bildmitte, da das Gewicht des zentralen Pixels im Durchschnitt am Rand größer ist. Damit die Ergebnisse nicht von diesem Effekt abhängen, wurden die Ränder des Bildes nach jeder Filterung entsprechend abgeschnitten.

Die Filterung wurde für verschiedene Parameterwerte durchgeführt und die Dichtefunktionen jeweils als Graphik abgespeichert. Die ermittelten Dichtefunktionen waren immer glockenförmig. Für einige Parameterwerte sind die Dichtefunktionen in den Abbildungen 16 bis 20 zu sehen. Die Werte *sx*, *sz* bzw. *eta* beziehen sich auf die Parameter σ_x, σ_z bzw. η der Gauß-Filterkette

$$G \circ G_{\sigma_x,\sigma_z,\eta} \circ G\colon I\!R^{\mathcal{P}} \to I\!R^{\mathcal{P}} \quad .$$

Im allgemeinen werden die Grauwerte nach einer Filterung nicht normalverteilt sein. Zusätzlich zu den Standardabweichungen wurden daher Werte $\alpha \in I\!R$ gemessen, so daß das Intervall $[-\alpha, \alpha]$ 68%, 95% bzw. 99% der Grauwerte des Bildes enthält. Diese Werte sind links in den Graphiken für die einzelnen Filterschritte angegeben.

Bemerkung 5.5 (Halbierung des Rauschens) *Die Abbildungen 16 bis 20 zeigen, daß mit kleinem σ_x und σ_z von ungefähr der Standardabweichung des Rauschens das Rauschen mit jedem Filterschritt ungefähr halbiert wird. Es ist damit sinnvoll, den Parameter σ_z mit jedem Filterschritt zu halbieren, wie dies die Gauß-Filterkette vorschreibt.*

Die Standardabweichungen und die positive Intervallgrenze der einzelnen Intervalle werden in der Abbildungen 21 bis 24 als Funktionen bezüglich σ_x bzw. σ_z dargestellt. Für diese Abbildungen wurde mehr als 300 mal mit Hilfe der Gauß-Filterkette gefiltert. Aus den Abbildungen ergibt sich die folgende

Bemerkung 5.6 (Glättung des Rauschens) *Zur Glättung des Rauschens sollte σ_z mindestens dreiviertel der Standardabweichung des Rauschens betragen und σ_x sollte größer als Eins sein. Nach Bemerkung 5.4 folgt dann, daß Kanten mit einer Höhe, welche das ein-einhalbfache der Standardabweichung des Rausches übersteigt, erkannt werden können.*

Für große Werte σ_z verhält sich das nichtlineare Gauß-Filter fast wie das lineare Gauß-Filter. Da die Hintereinanderausführung zweier linearer Gauß-Filter mit den Parametern σ und τ der Filterung mit einem linearen Gauß-Filter mit dem Parameterwert $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ entspricht, kann die Gauß-Filterkette mit $\eta = 1$ das Rauschen nicht besser glätten als ein lineares Gauß-Filter mit dem Parameterwert $\sigma = \sigma_x\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4} \approx \sigma_x \cdot 2,3$. Analog zur Filterkette ist die Glättung für das lineare Gauß-Filter berechnet worden. Die Werte sind in der Abbildung 25 dargestellt.

In Lemma 4.27 ist eine Schranke für die Verstärkung der Filterwirkung mit Hilfe des Parameters η angegeben worden. Da das Rauschen in jeder Filterung halbiert werden sollte, und auch der Parameter σ_z in jedem Filterschritt halbiert wird, ist es sinnvoll, den Faktor η in jedem Filterschritt gleich zu wählen. Die Rechnungen für die Abbildungen 16 bis 24 wurden mit $\eta = 1.3$ erneut durchgefürht. In den Abbildungen 26 bis 33 ist die Filterwirkung einer solchen Filterkette zu sehen. Durch Vergleich der Abbildungen wird die Wirkung des Faktors η deutlich. Man sieht, daß mit $\eta = 1.3$ das Rauschen besser geglättet wird. Rampen und Kanten können damit besser erhalten werden.

Bemerkung 5.7 (Glättung des Rauschens bei $\eta = 1.3$) *Zur Glättung des Rauschens mit $\eta = 1.3$ sollte σ_z größer als die Standardabweichung des Rauschens sein und σ_x sollte größer als Eins sein. Kanten mit einer Höhe, welche die Standardabweichung des Rauschens leicht übersteigt, können nach Bemerkung 5.4 nur dann erkannt werden, wenn σ_z der halben Standardabweichung des Rauschen entspricht; in diesem Fall sollte σ_x größer als drei gewählt werden, damit das Rauschen klein genug wird. Dies gilt zum Teil auch dann, wenn der Parameter η größer ist, als die Bedingung aus Lemma 4.27 auf Seite 41 bzw. Bemerkung 4.28 zuläßt.*

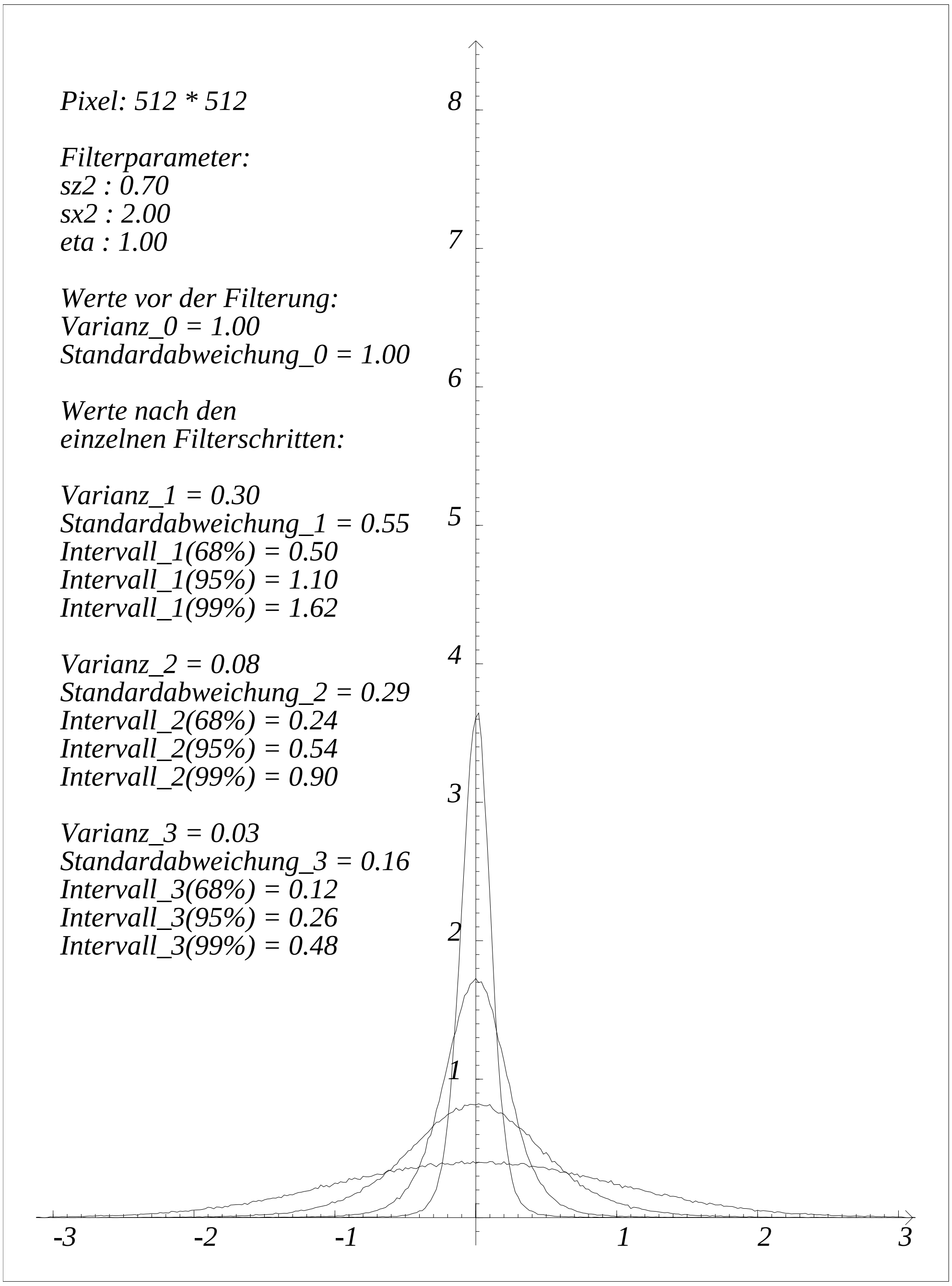


Abbildung 16: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

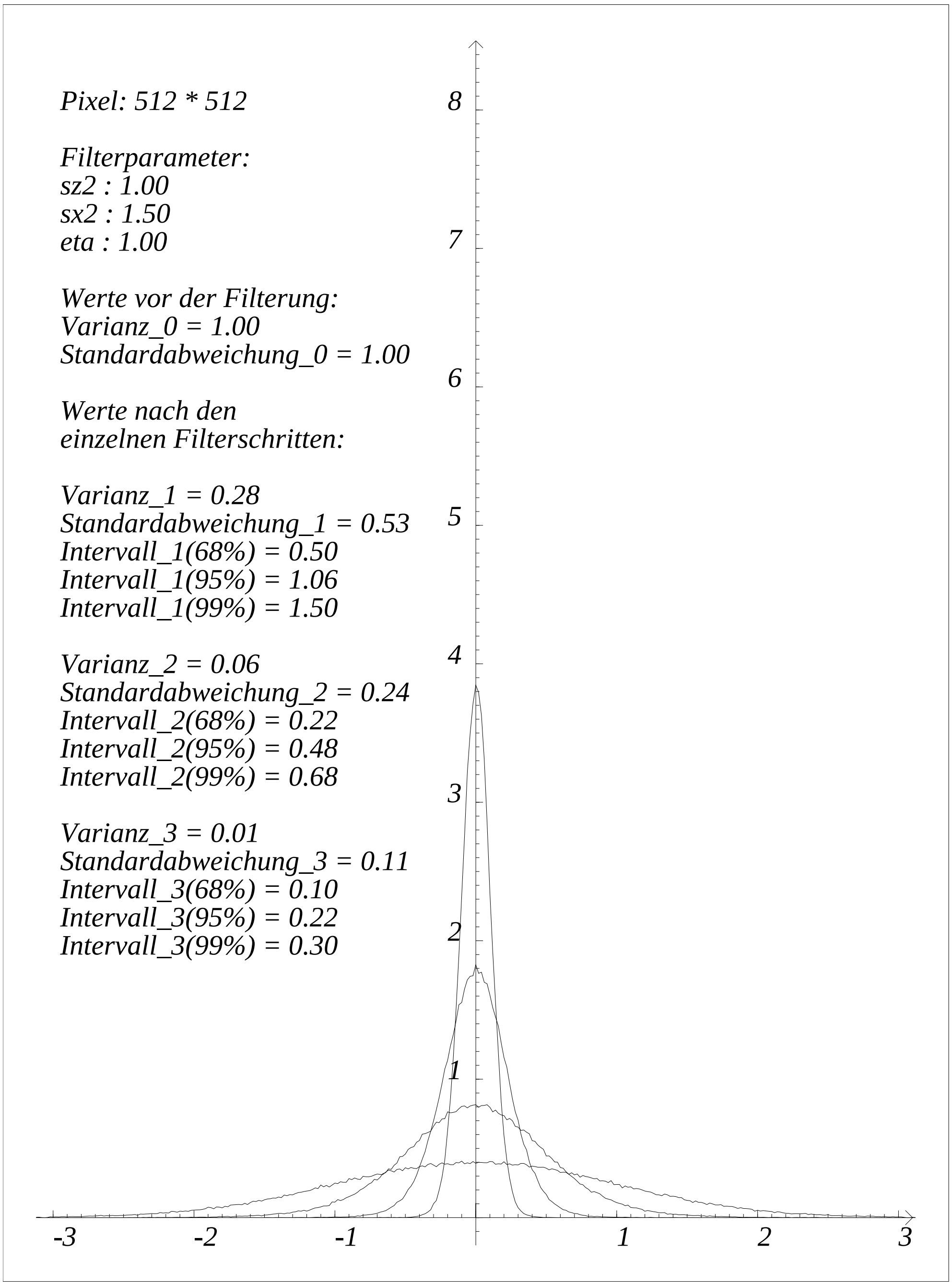


Abbildung 17: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

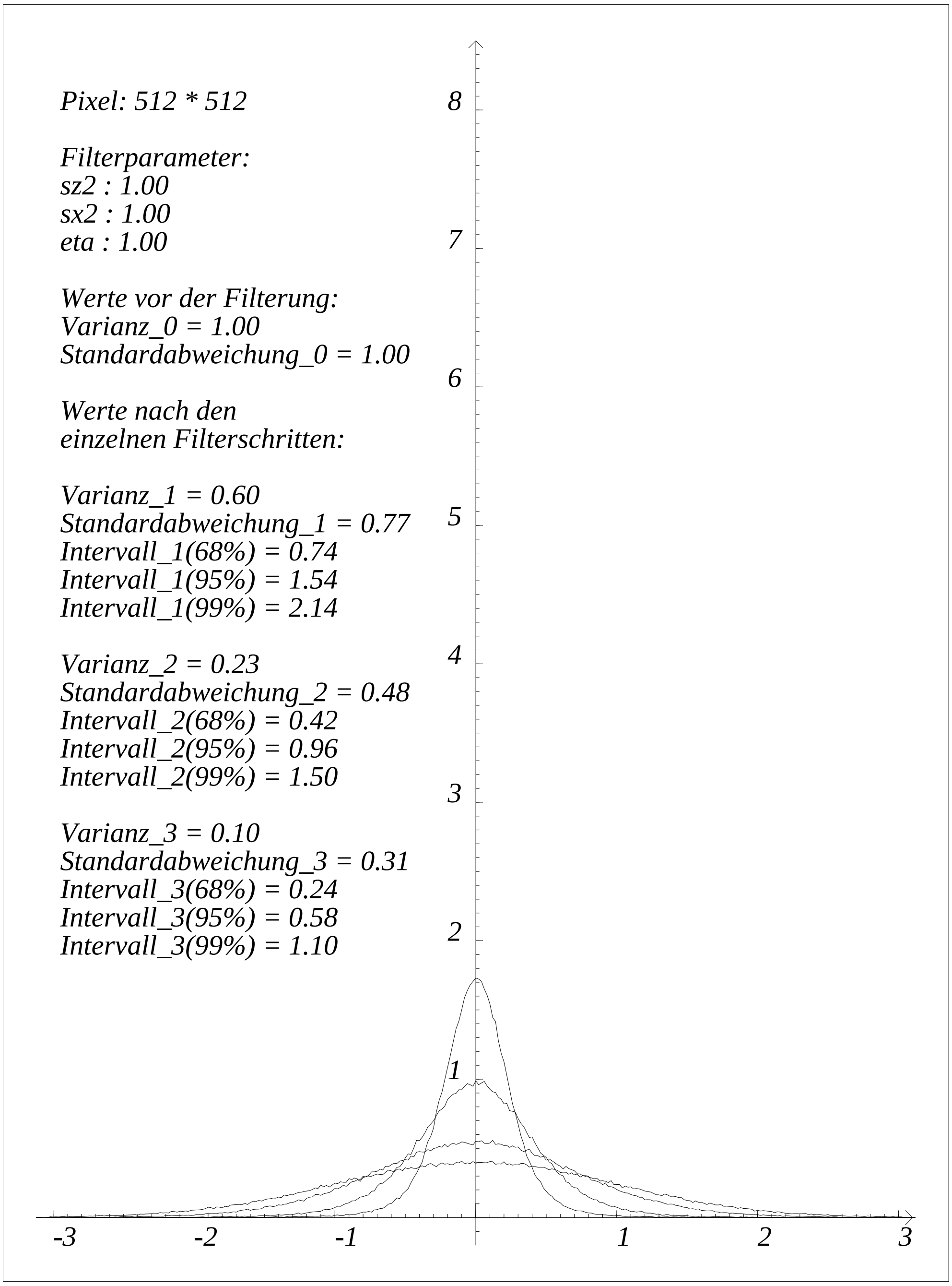


Abbildung 18: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

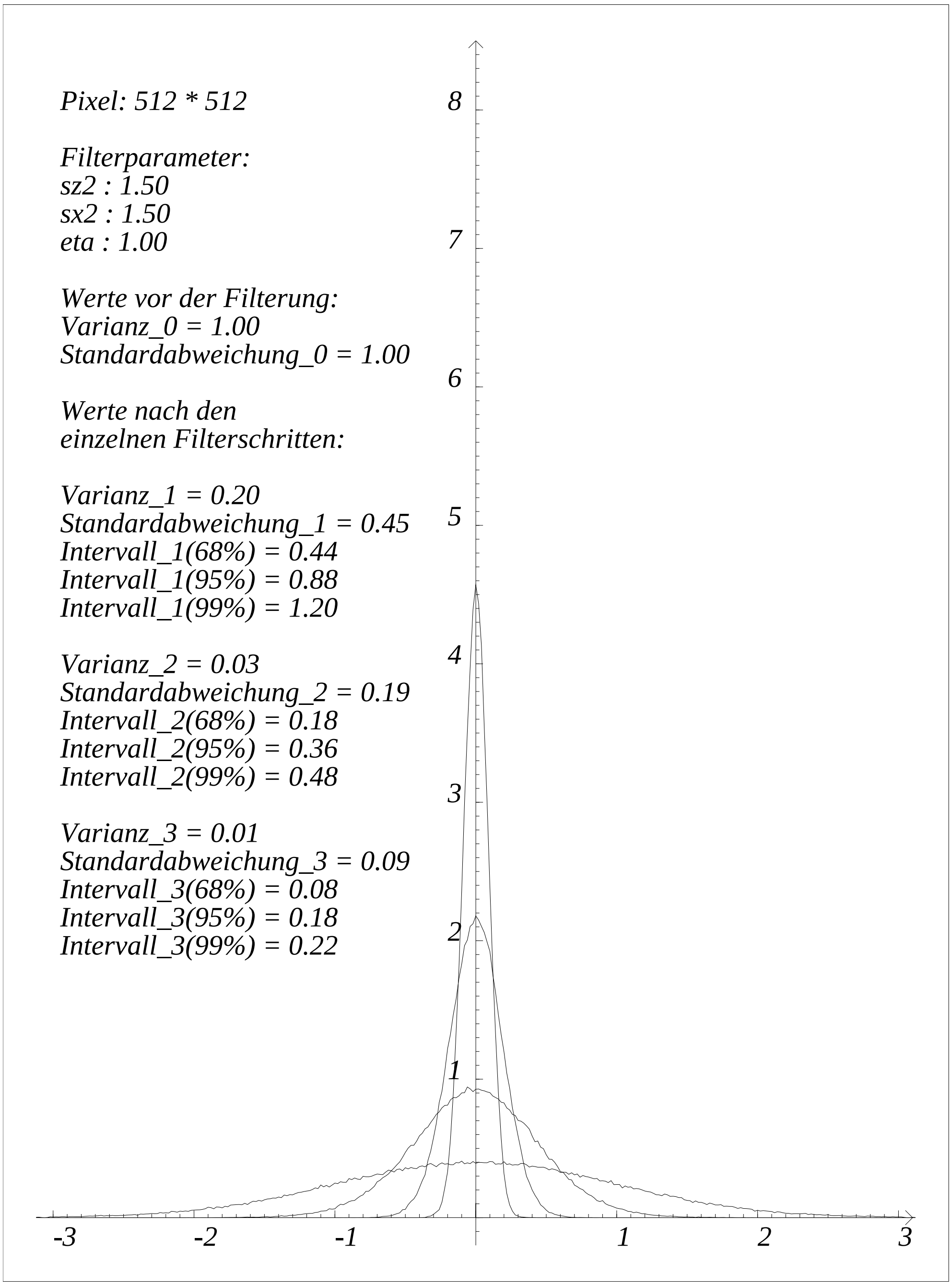


Abbildung 19: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

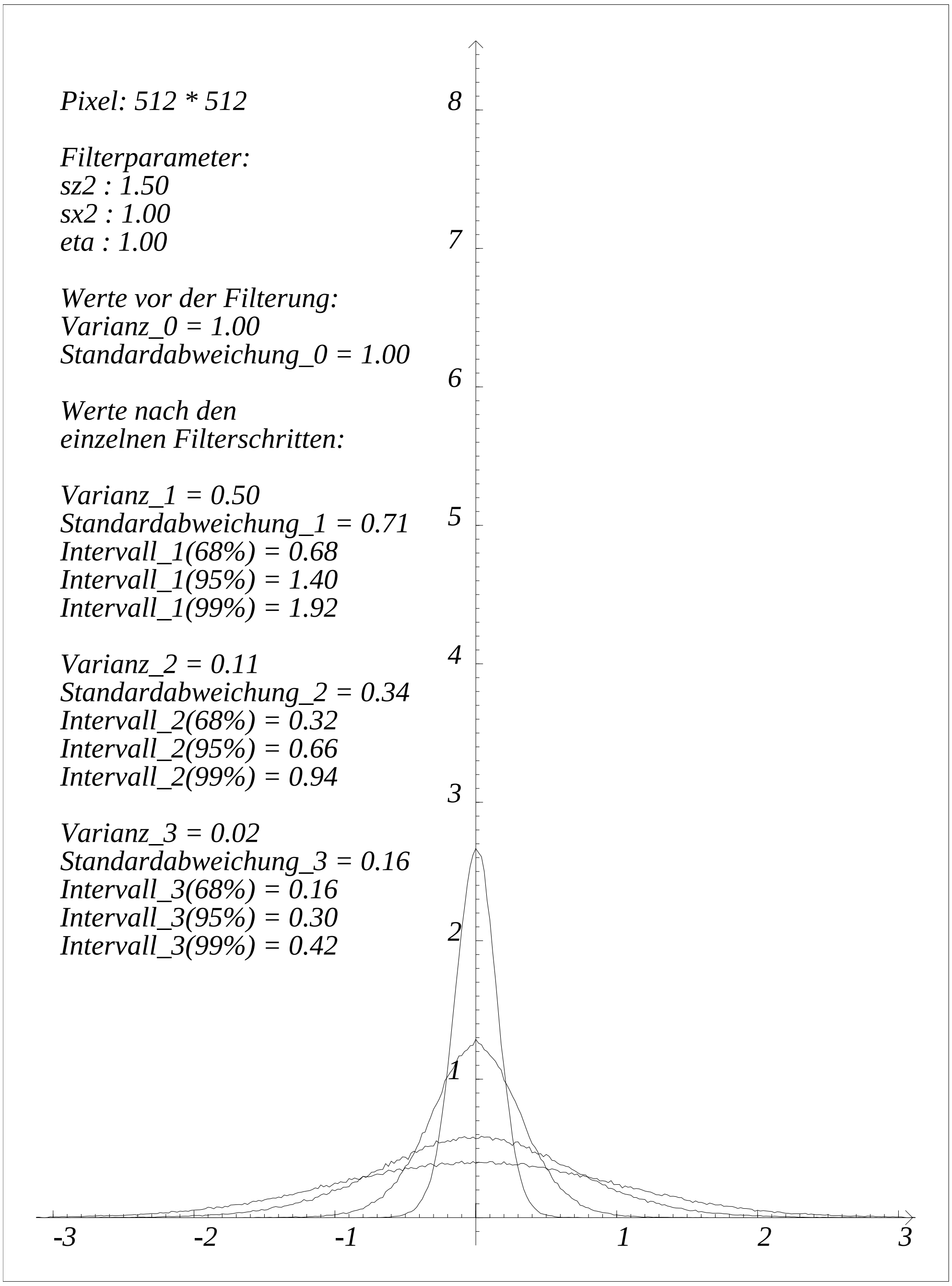
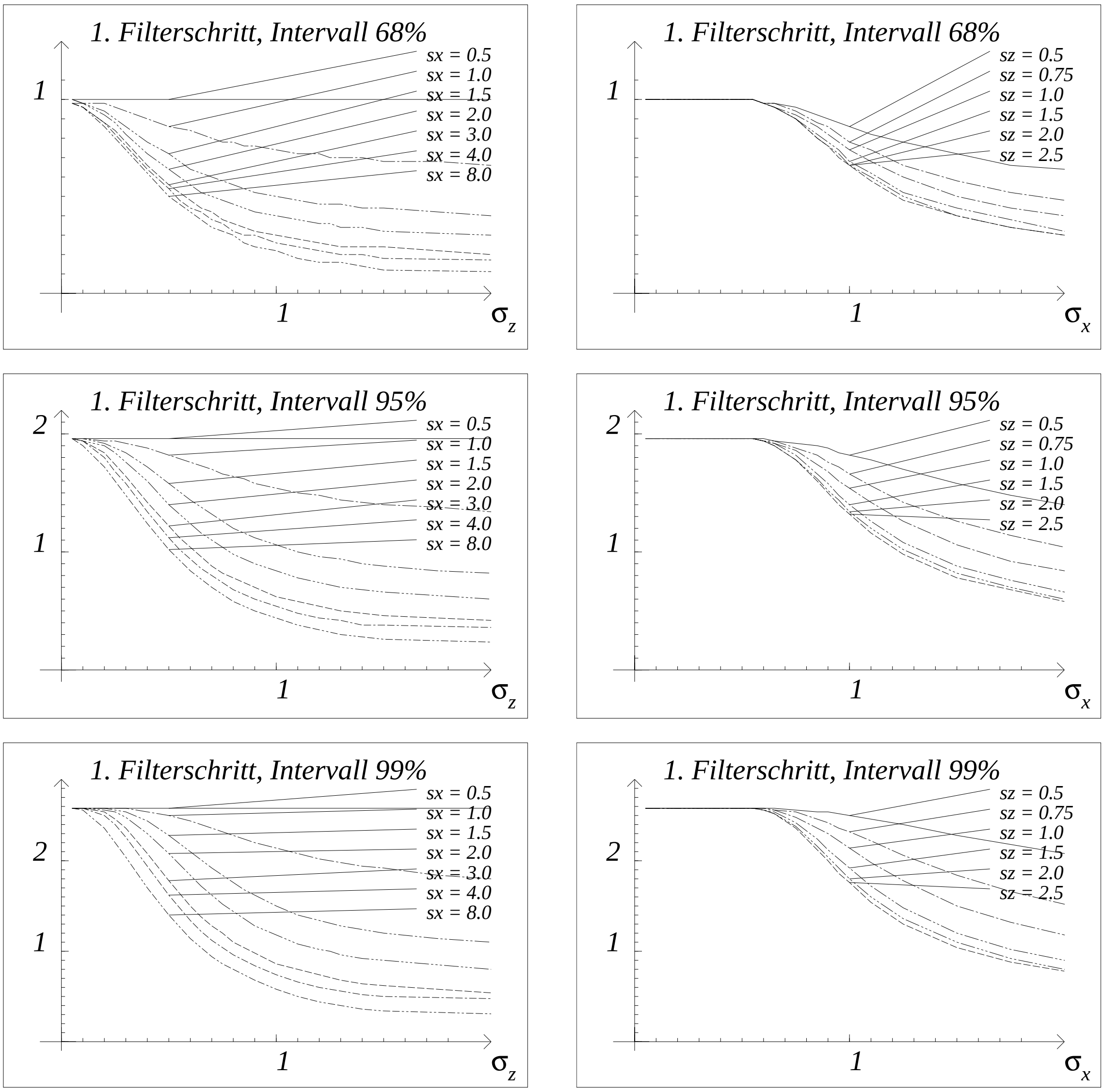
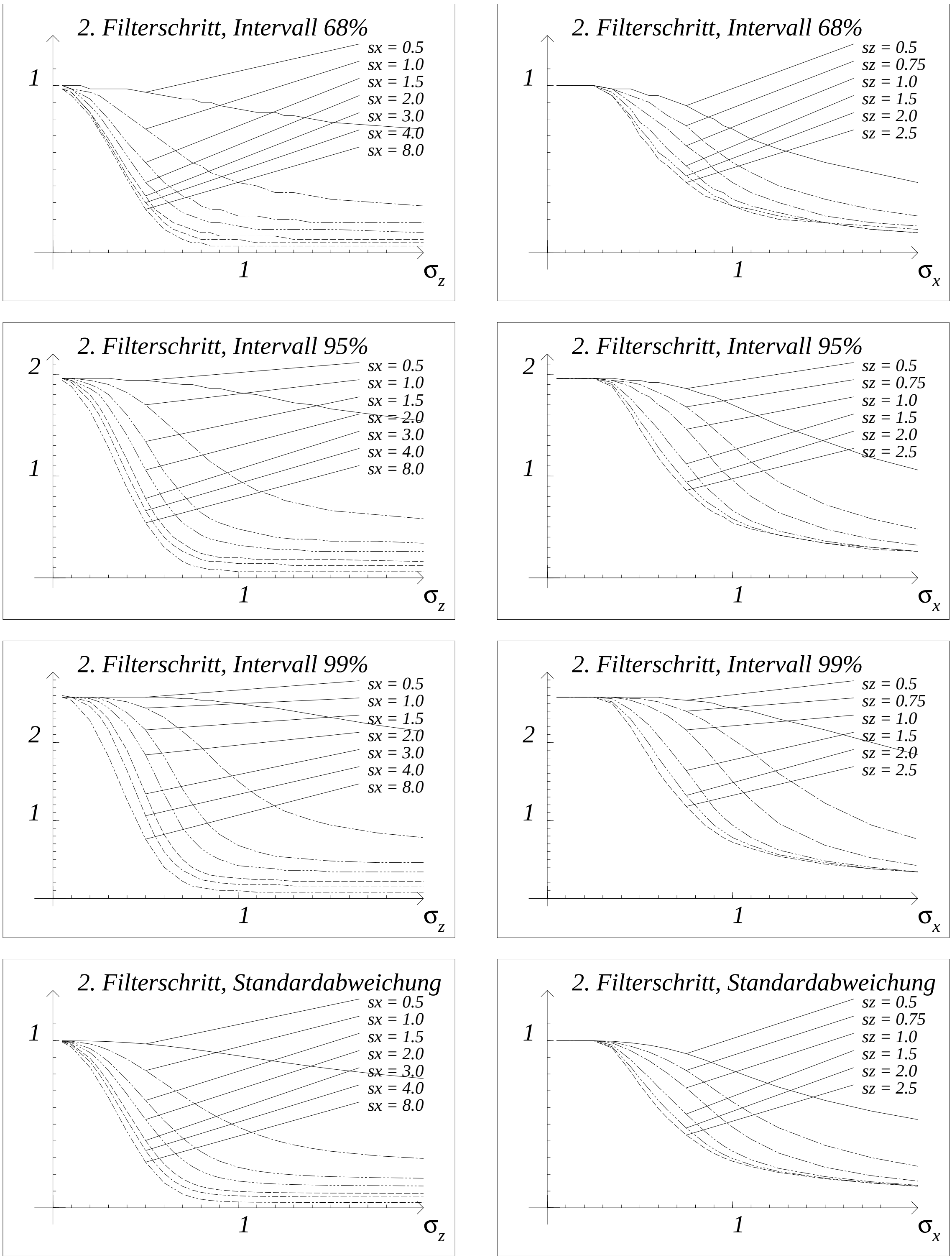


Abbildung 20: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten



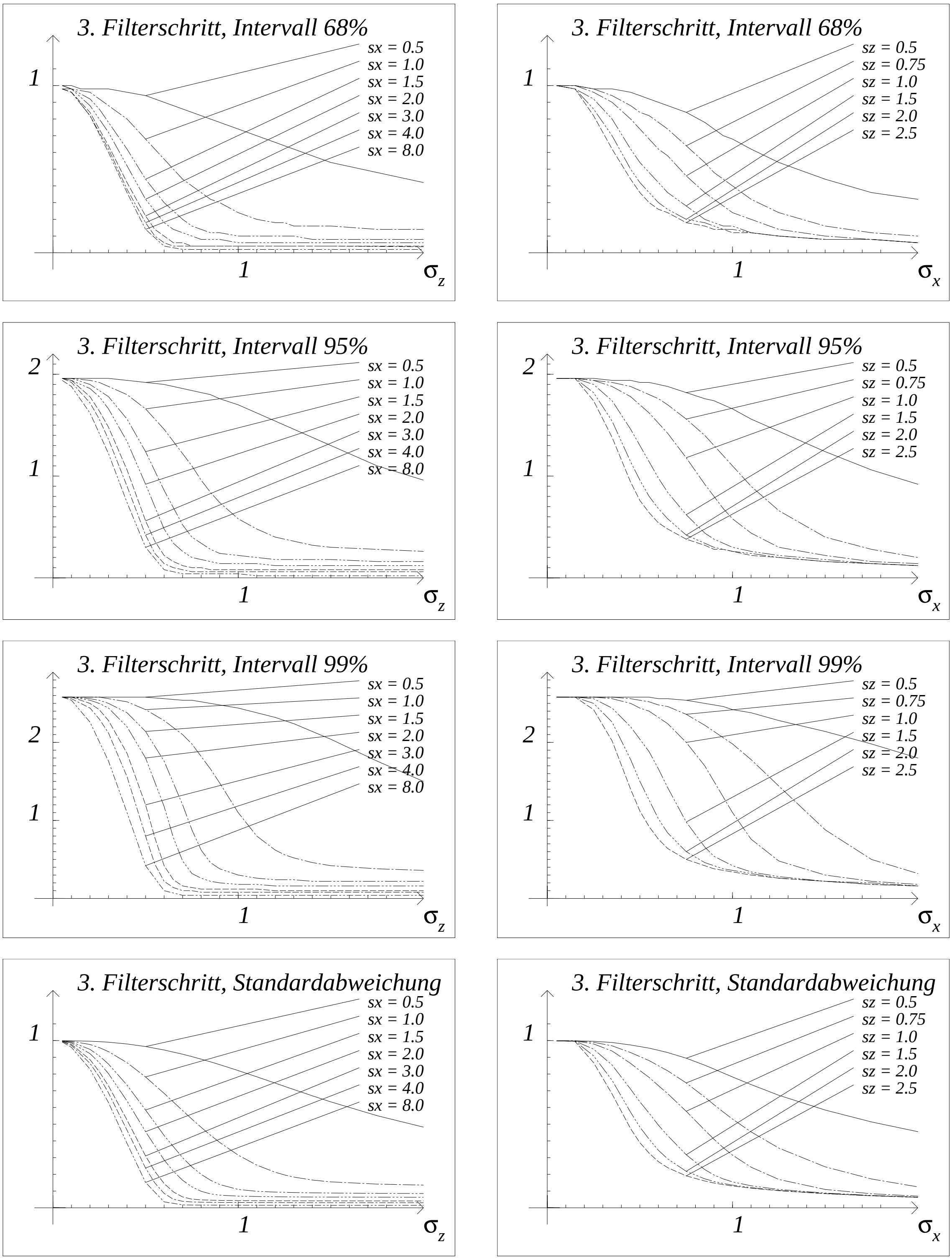
Für Gaußsches Rauschen wurden die Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen nach dem ersten Filterschritt für verschiedene Parameter untersucht. Da die gemessenen Werte sowohl von σ_x als auch von σ_z abhängen, sind jeweils zwei Diagramme zu sehen: Links sind die Kurven von σ_z abhängig und rechts von σ_x. Die Kurven zeigen von oben nach unten die halben Längen der Intervalle mit 68%, 95% und 99% der Grauwerte. Man sieht, wie beide Parameter der Filterung zur Glättung beitragen.

Abbildung 21: Verteilungen nach dem ersten Filterschritt



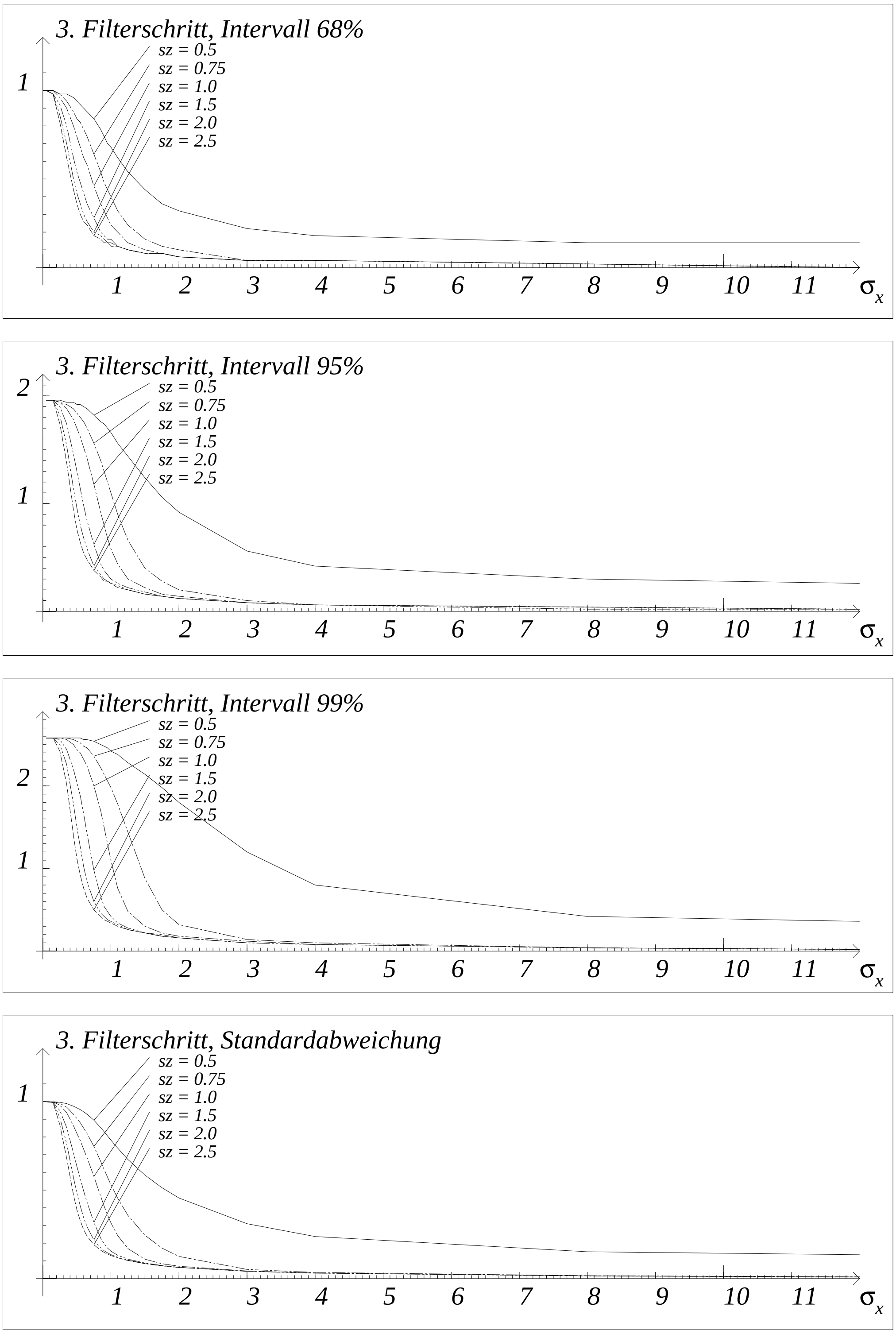
Analog zu Abbildung 21 werden hier die Werte für die Grauwertverteilungen nach dem zweiten Filterschritt gezeigt. In der untersten Zeile ist die Standardabweichung in Abhängigkeit von σ_x und σ_z zu sehen.

Abbildung 22: Verteilungen nach dem zweiten Filterschritt



Analog zu Abbildung 22 werden hier die Werte für die Grauwertverteilungen nach dem dritten Filterschritt gezeigt.

Abbildung 23: Verteilungen nach dem dritten Filterschritt



Die rechten Graphen aus Abbildung 23 werden hier nochmal für große Werte σ_x gezeigt.

Abbildung 24: Verteilungen nach dem dritten Filterschritt

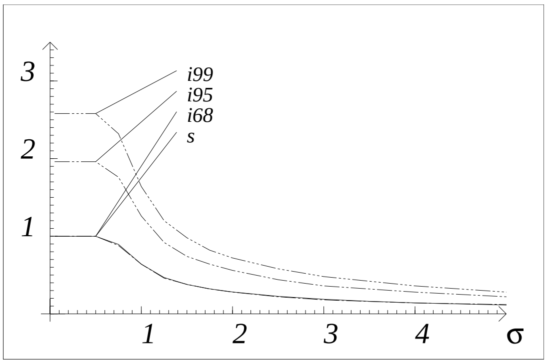


Abbildung 25: Grauwertverteilungen nach einer linearen Gauß-Filterung

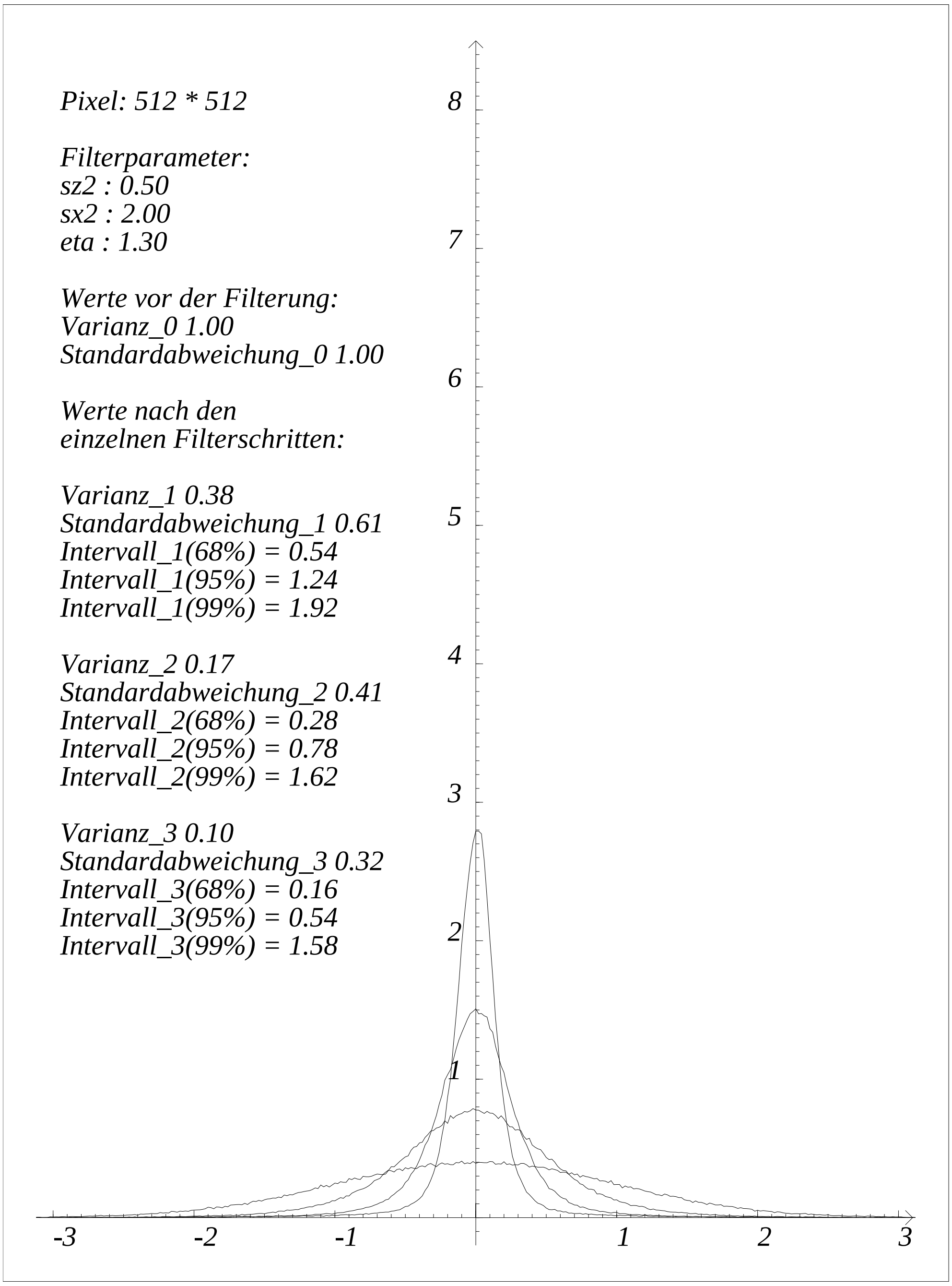


Abbildung 26: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

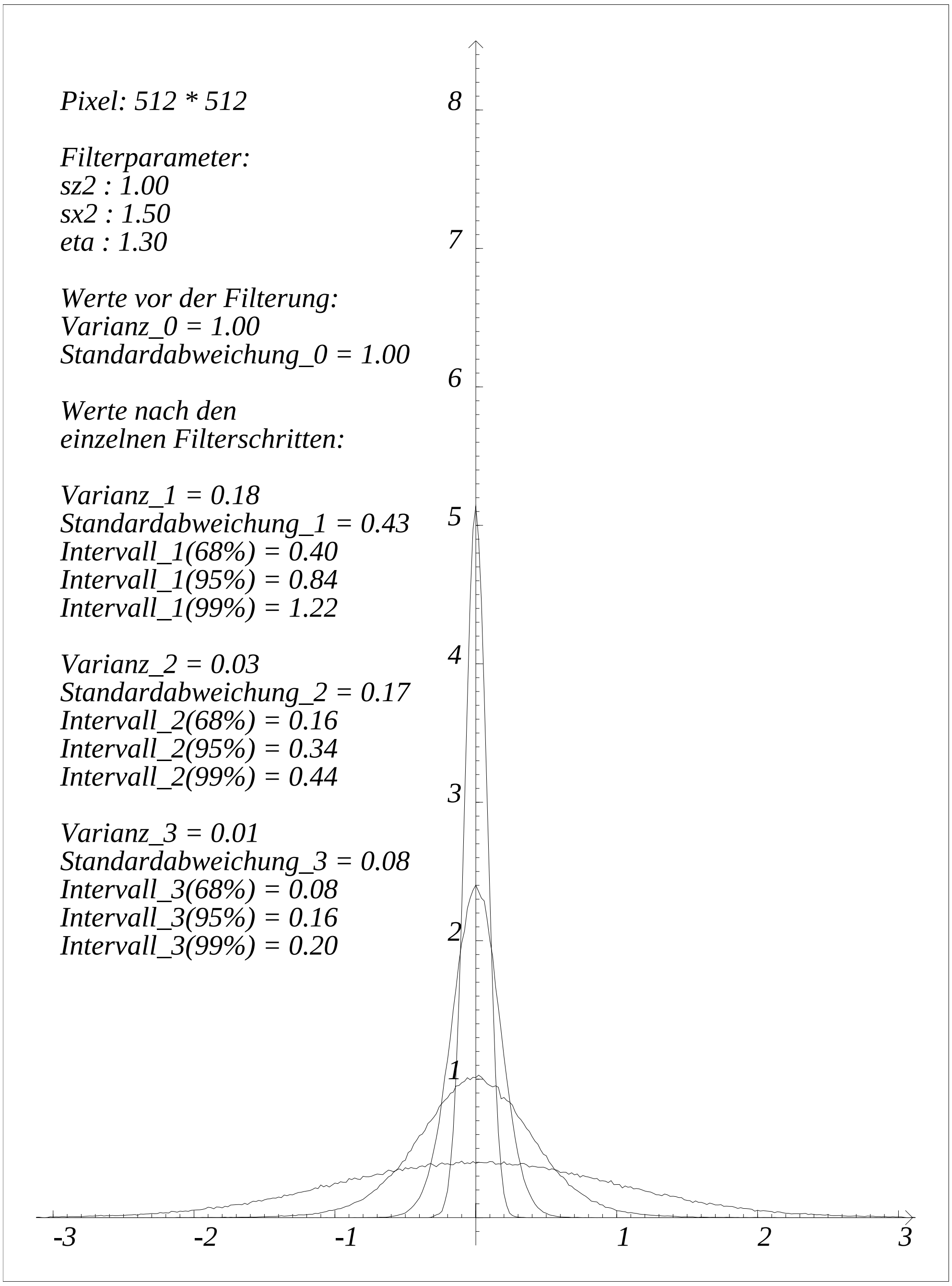


Abbildung 27: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

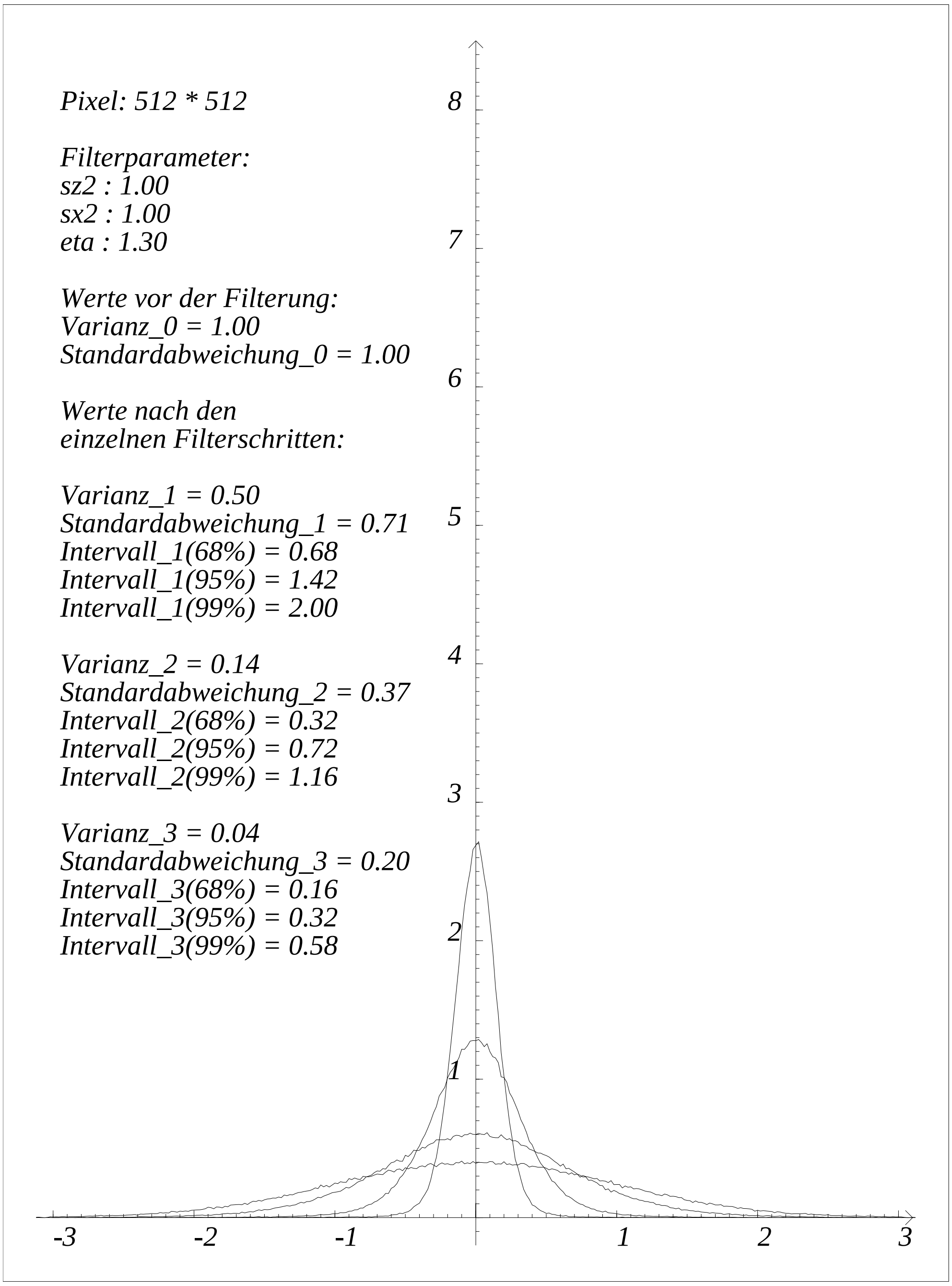


Abbildung 28: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

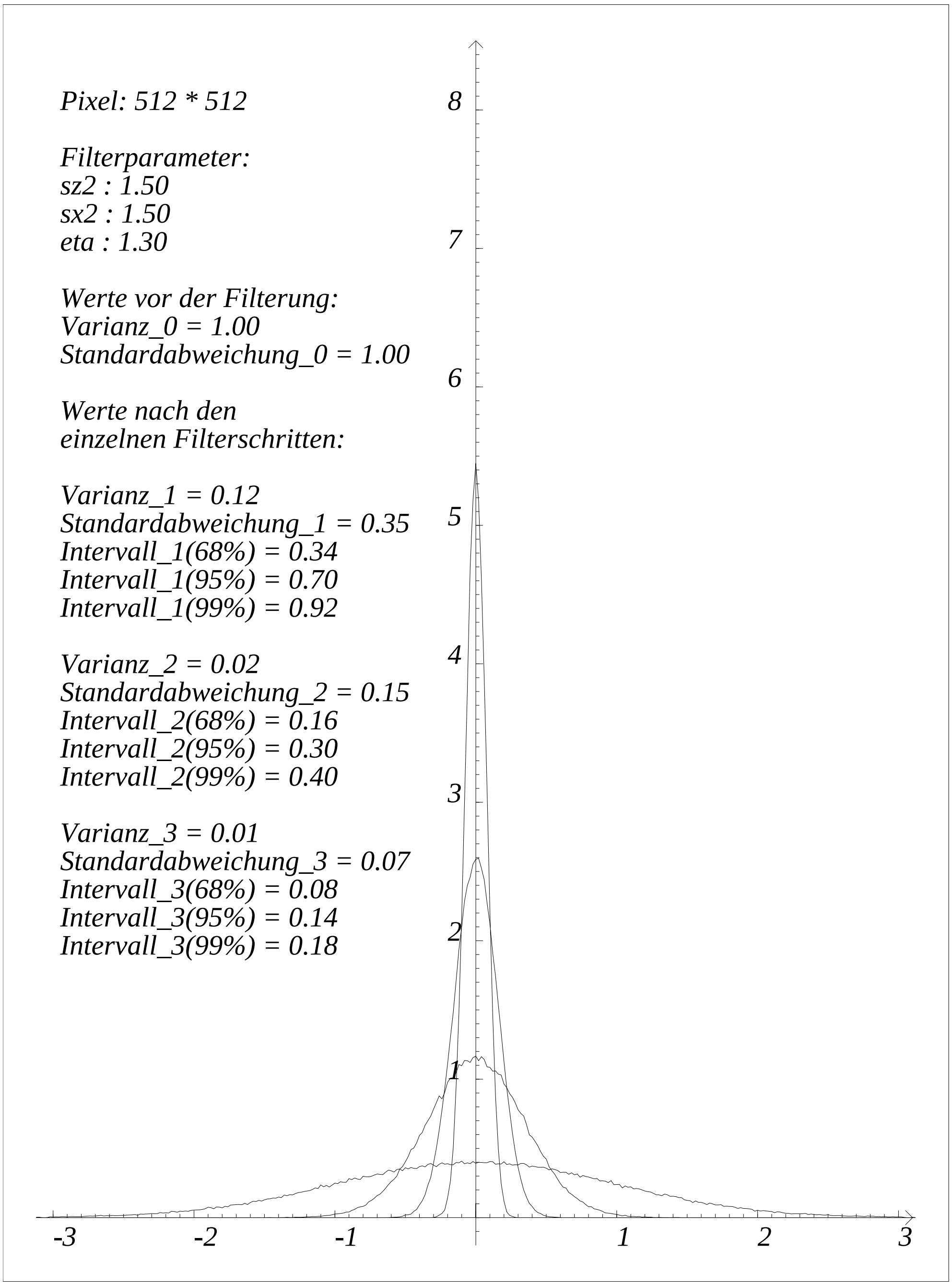


Abbildung 29: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten

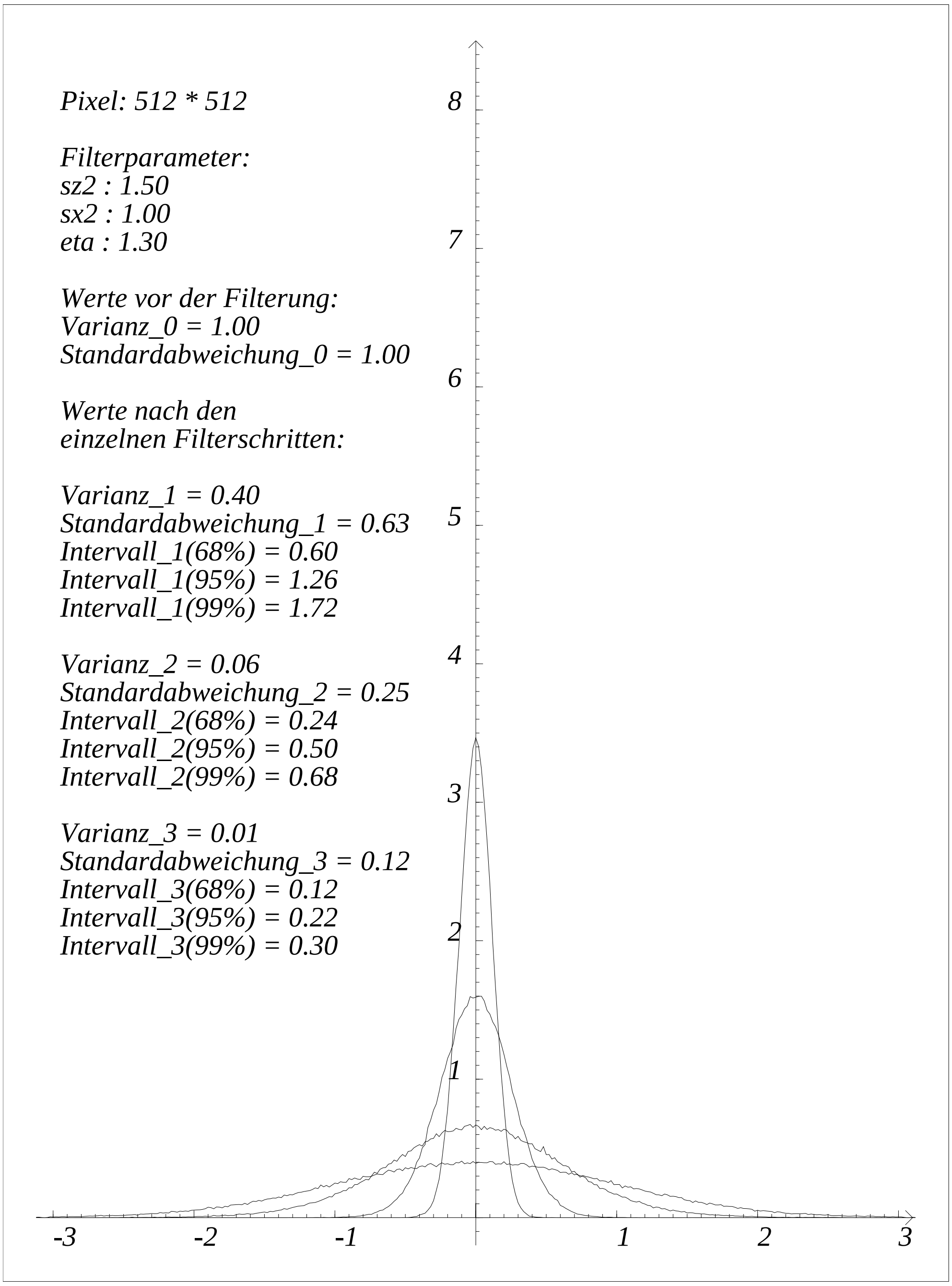
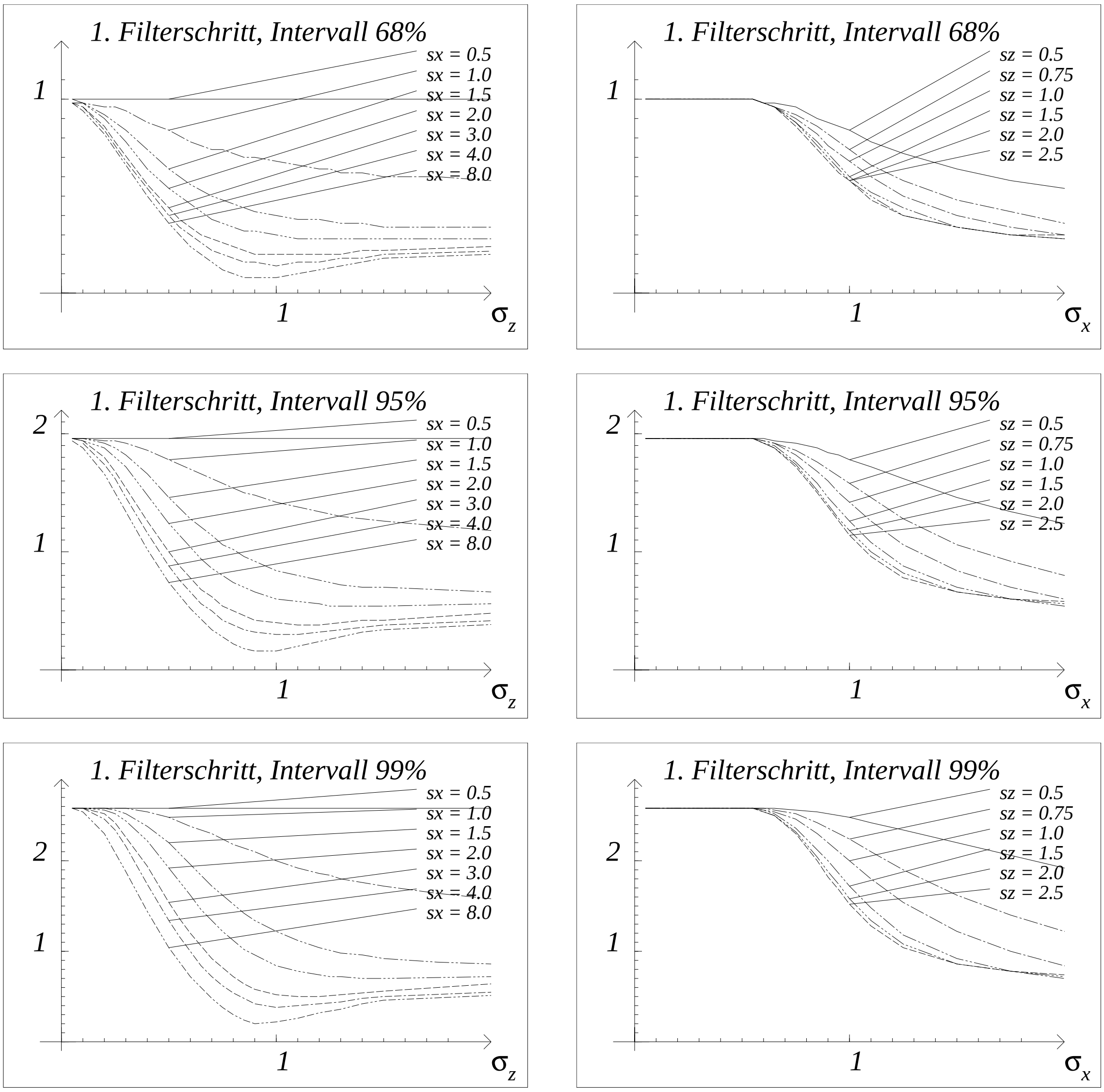


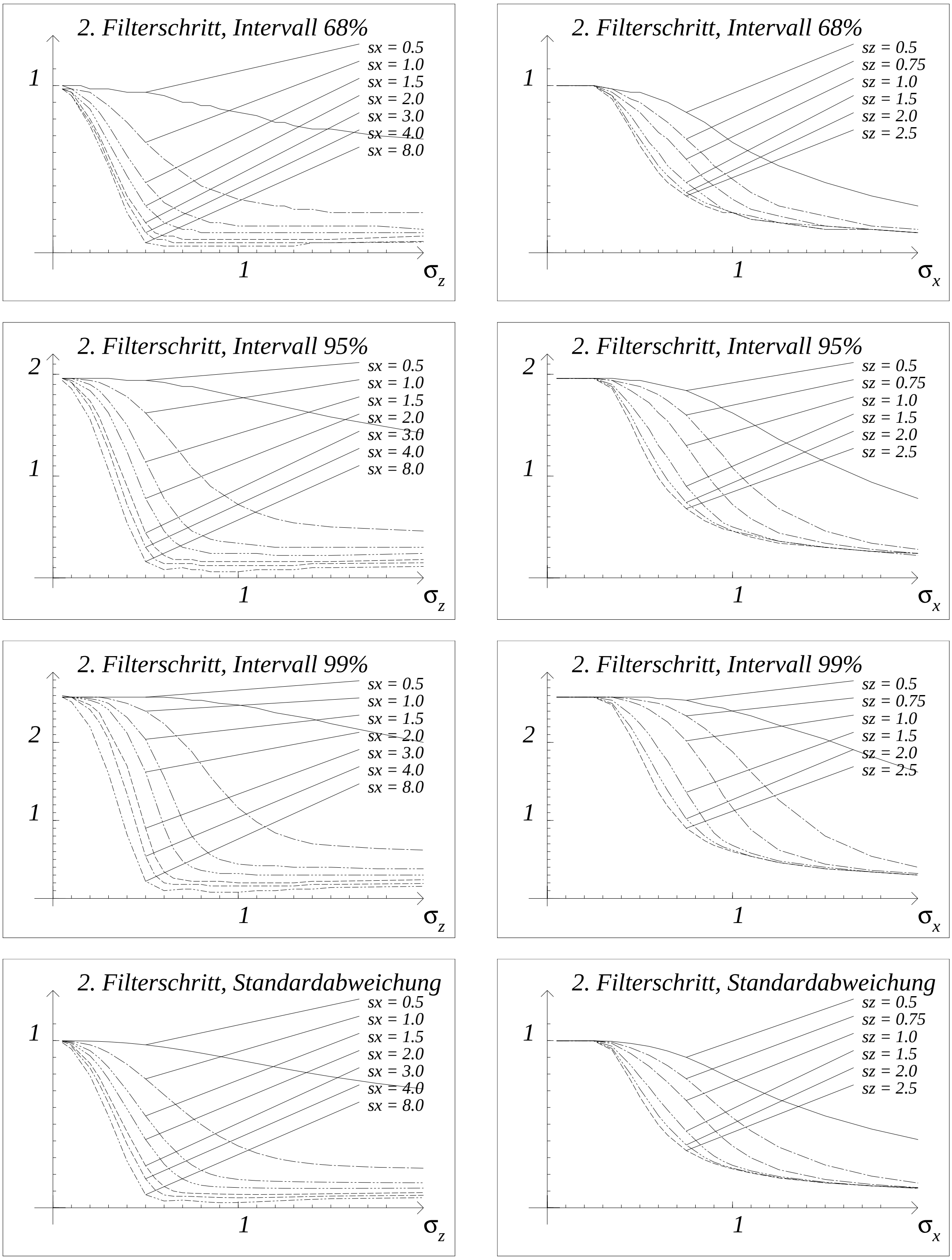
Abbildung 30: Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen einer Filterung mit einer Filterkette nach den einzelnen Filterschritten



Für Gaußsches Rauschen wurden die Dichtefunktionen der Grauwertverteilungen nach dem ersten Filterschritt für verschiedene Parameter untersucht. Da die gemessenen Werte sowohl von σ_x als auch von σ_z abhängen, sind jeweils zwei Diagramme zu sehen: Links sind die Kurven von σ_z abhängig und rechts von σ_x. Die Kurven zeigen von oben nach unten die halben Längen der Intervalle mit 68%, 95% und 99% der Grauwerte. Man sieht, wie beide Parameter der Filterung zur Glättung beitragen.

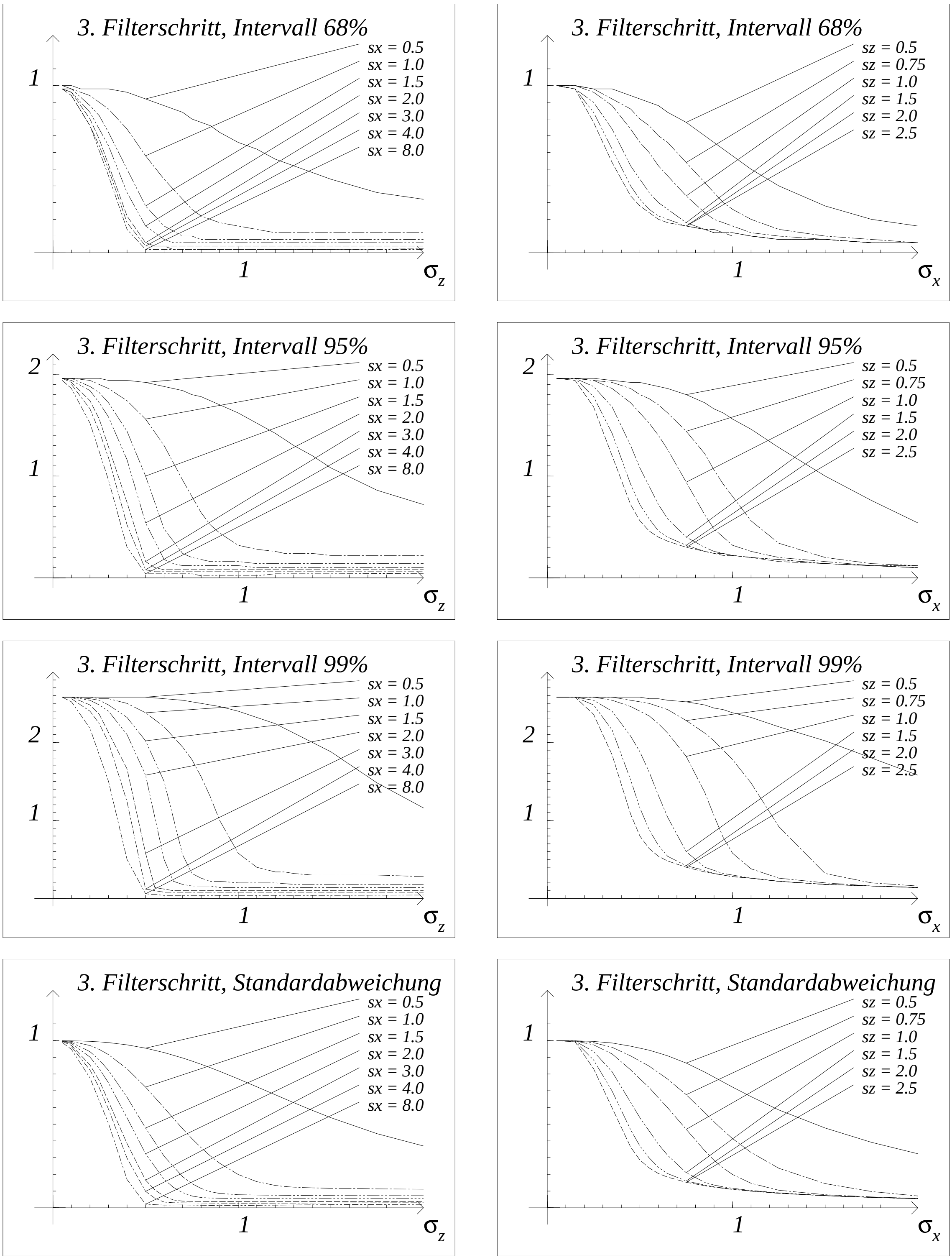
Durch Vergleich mit Abbildung 21 kann die Wirkung des Parameters η beobachtet werden. Da im ersten Filterschritt der Wert von σ_z doppelt so groß ist, wie das aufgetragene σ_z der Gauß-Filterkette und da die Standardabweichung des Testbildes 1 beträgt, verletzt die Gauß-Filterkette die Bedingung aus Lemma 4.27 für $\sigma_z > 0.9$. Die Verletzung der Bedingung kann in den Graphen beobachtet werden.

Abbildung 31: Verteilungen nach dem ersten Filterschritt mit $\eta = 1.3$



Analog zu Abbildung 31 werden hier die Werte für die Grauwertverteilungen nach dem zweiten Filterschritt gezeigt. In der untersten Zeile ist die Standardabweichung in Abhängigkeit von σ_x und σ_z zu sehen.

Abbildung 32: Verteilungen nach dem zweiten Filterschritt mit $\eta = 1.3$



Analog zu Abbildung 32 werden hier die Werte für die Grauwertverteilungen nach dem dritten Filterschritt gezeigt.

Abbildung 33: Verteilungen nach dem dritten Filterschritt mit $\eta = 1.3$

6 Beispiele für die Filterung mit der Filterkette

Das nichtlineare Gauß-Filter wurde für rechteckige Bilder aus $Abb(\mathcal{P}, [\![0, 255]\!])$ mit $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^2$ implementiert und getestet. Bei der Filterung mit der Filterkette wurden die Grauwerte der Bilder nach jedem Filterschritt gerundet. Um den Einfluß der Rundung nicht zu groß werden zu lassen, wurden in den Abbildungen 34 bis 39 ein Testbild mit starkem Rauschen verwendet.

6.1 Kante mit Rauschen

Wir betrachten nun Bilder, welche in der Mitte eine Kante aufweisen. Außerdem sei jeder Wert eines Pixels mit einem Fehler behaftet. Mit Hilfe eines Pseudo-Zufallszahlengenerators ist auf den Kantenbildern der Abbildung 34 bis 39 Rauschen erzeugt worden, welches zwar nur ganze Zahlen annimmt, jedoch in etwa normalverteilt ist. Die Standardabweichung des Rauschens beträgt 20. Will man nicht allzu feine Strukturen erhalten, so wählt man für den Operator $G \circ G_{\sigma_x,\sigma_z,\eta} \circ G$ ein $\sigma_x = 2.0$.

Zur Demonstration der Wirkung des Operators werden nun zwei Bilder mit den entprechenden Filterresultaten der einzelnen Filterschritte und ihren Projektionen von der Seite gezeigt. Dabei entsprechen die Grauwerte der Projektionen der Anzahl der in dieser Spalte gefundenen Pixel mit dem entsprechendem Grauwert.

Erstes Beispiel

Das Bild in Abbildung 34 enthält gaußsches Rauschen von der Standardabweichung 20 und einer Kante mit Sprunghöhe 20. Dieses Bild wurde mit verschiedenen Parametern gefiltert. Man erkennt deutlich, daß die Kante für $\sigma_z = 20$ gut zu erkennen ist. Im Bild mit $\sigma_z = 10$ ist die Kante zwar besser zu erkennen, jedoch ist noch viel Rauschen übrig. Man sieht, für das obige Bild sollte der Wert für σ_z abhängig vom Wert für σ_x irgendwo zwischen 10 und 20 liegen.

In den Projektionen kann zwar die Verteilung der Grauwerte betrachtet werden, das Bild ist aber glatter, als es durch die Projektionen erscheint. Durch das ursprüngliche Rauschen ergeben sich im gefilterten Bild lokale Schwankungen der Grauwerte, welche in der Verteilungsfunktion zu sehen sind.

Erhöht man das σ_x, so wird die Kante etwas glatter, wie dies unten in Abbildung 34 zu sehen ist.

Zweites Beispiel

Das Bild in Abbildung 35 enthält gaußsches Rauschen von der Standardabweichung 20 und eine Kante mit Sprunghöhe 40. Die Filterung wurde wieder mit den gleichen Parametern durchgeführt. Man sieht wie die Kante sehr deutlich erhalten bleibt.

Im unteren Bild in Abbildung 35 erkennt man, daß die Kante schon so hoch ist, daß die Kante auch bei Vergrößerung des Parameters σ_x kaum flacher wird.

Verstärkung der Filterwirkung

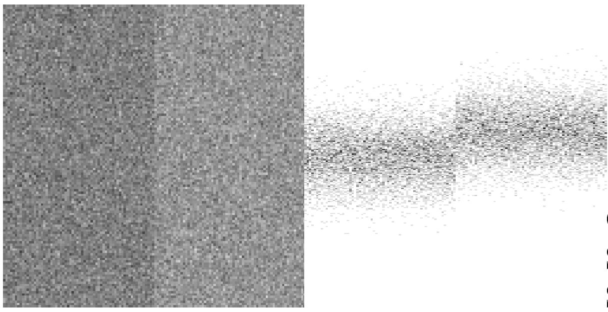
Für die Abbildungen 36 bis 39 wurden die Filterungen der Abbildungen 34 und 35 mit Hilfe des Faktors η nocheinmal durchgeführt.

Man sieht in den Abbildungen, wie mit Hilfe des Faktors η die Filterwirkung verbessert werden kann. Gerade wenn Kanten und Rampen erhalten werden sollen, welche gegenüber der Standardabweichung des Rauschens eine geringe Höhe haben, kann die Filterwirkung mit Hilfe des Faktors η erhalten werden.

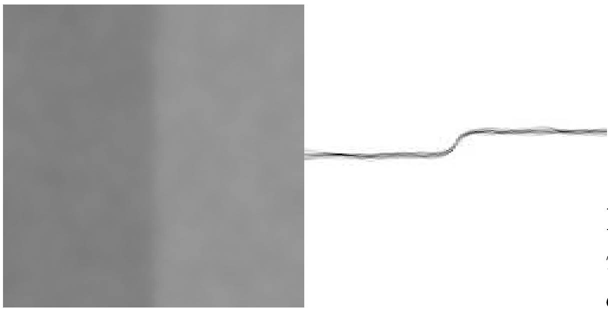
Es zeigt sich in den Abbildungen nicht nur die gute Wirkung der Filterkette, sondern sie sind auch ein Beleg, für die Bemerkungen zur Wahl der Filterparameter, welche im Kapitel 4 und 5 gemacht wurden.

In Abbildung 39 ist die Kante in der untersten Zeile besser erhalten, als in der zweiten Zeile. Der nichtlineare Effekt kommt hier gut zur Geltung.

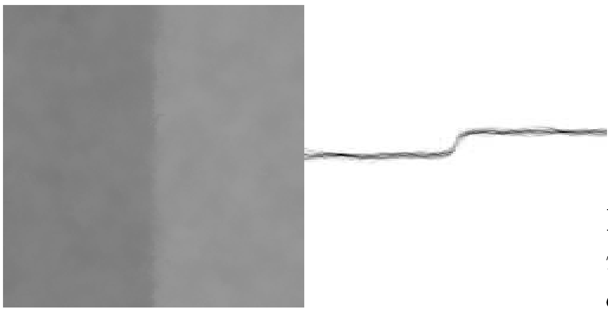
Bemerkung 6.1 *Die Abbildungen zeigen, daß die Erhaltung von Kanten und Rampen mit Hilfe der Gauß-Filterkette dann gelingen kann, wenn ihre Höhe der Kante größer als die Standardabweichung des Rauschens ist. Für gute Filterergebnisse müssen bei einem* σ_z*, welches der halben Standardabweichung des Rauschens entspricht, die Parameter* σ_x *und* η *der Gauß-Filterkette erhöht werden.*



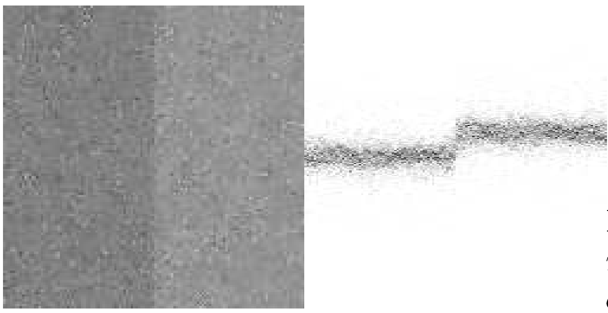
Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 20
Standardabweichung des Rauschens: 20



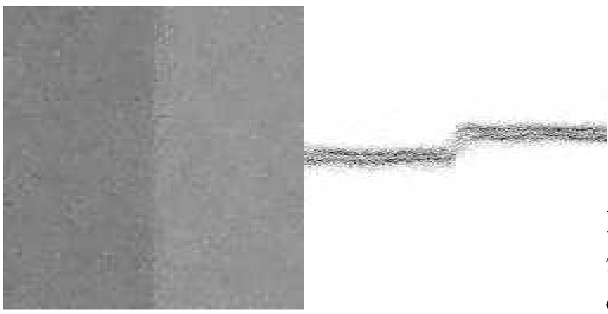
Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$



Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

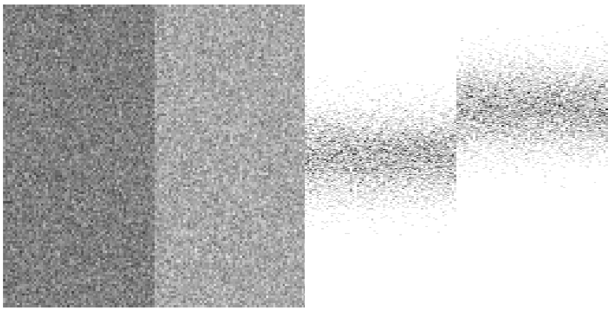


Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$

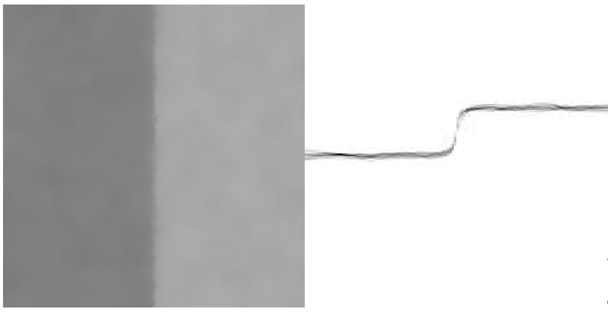


Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

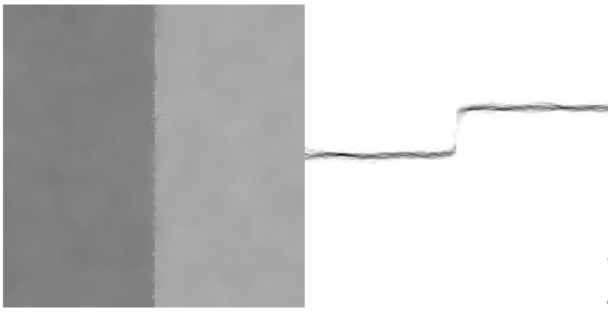
Abbildung 34: Filterung einer Kante mit kleiner Höhe



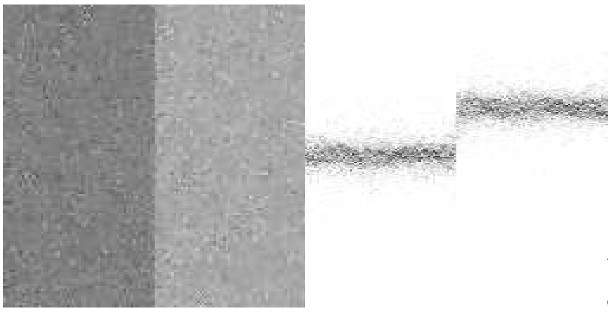
Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 40
Standardabweichung des Rauschens: 20



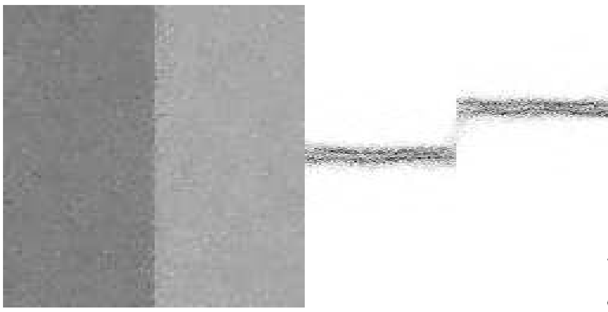
Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$



Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

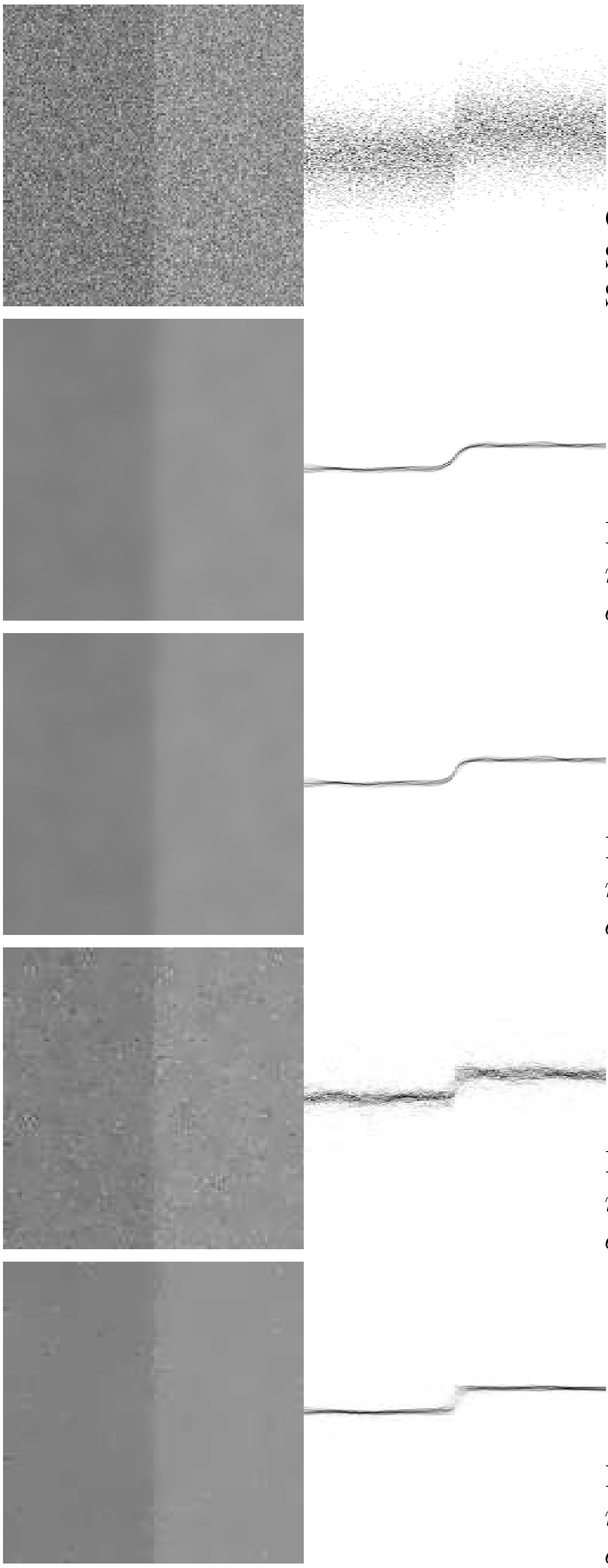


Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$



Filterung mit
$\eta = 1.0$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

Abbildung 35: Filterung einer Kante mit größerer Höhe



Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 20
Standardabweichung des Rauschens: 20

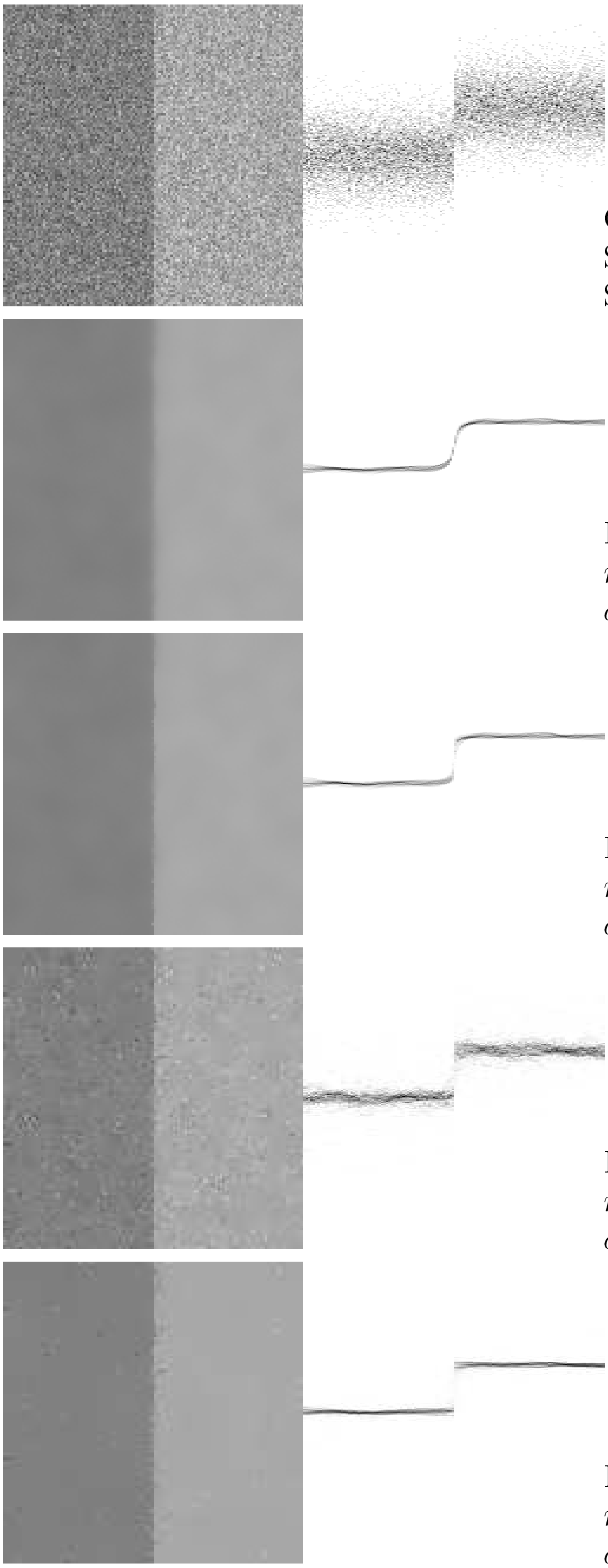
Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

Abbildung 36: Filterung einer Kante mit kleiner Höhe



Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 40
Standardabweichung des Rauschens: 20

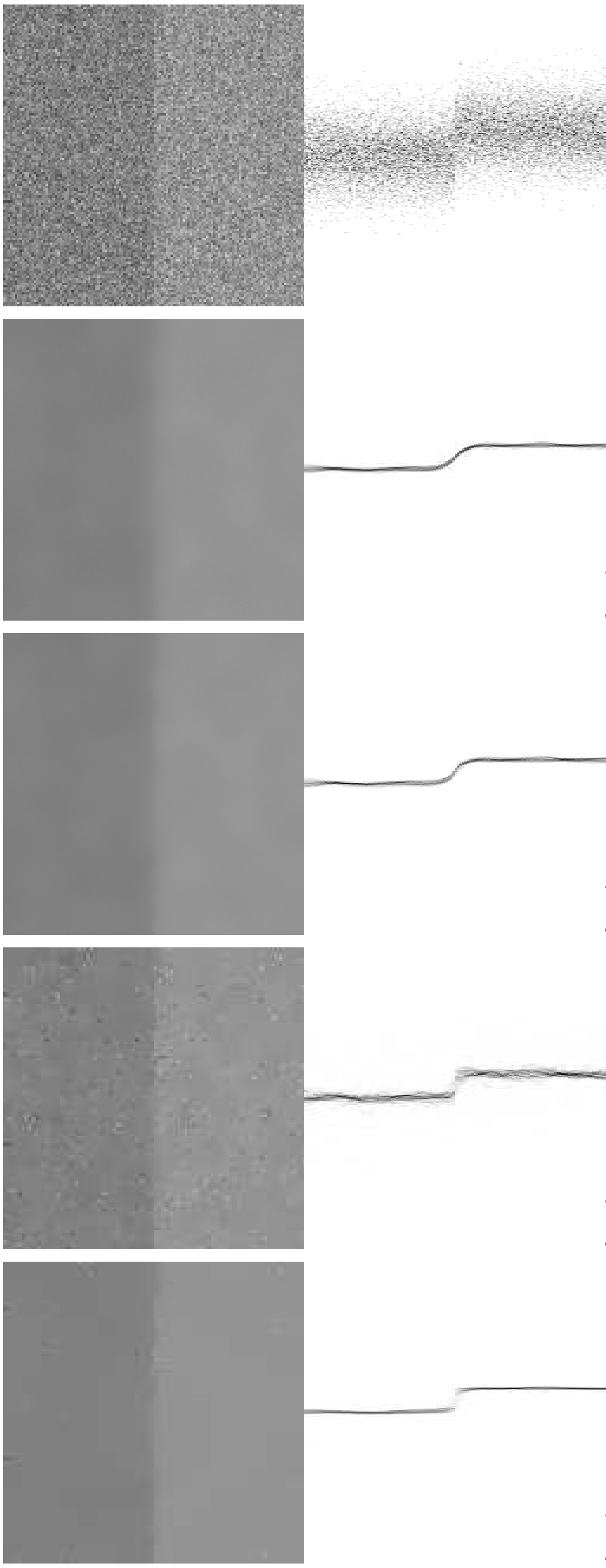
Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$

Filterung mit
$\eta = 1.3$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

Abbildung 37: Filterung einer Kante mit größerer Höhe



Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 20
Standardabweichung des Rauschens: 20

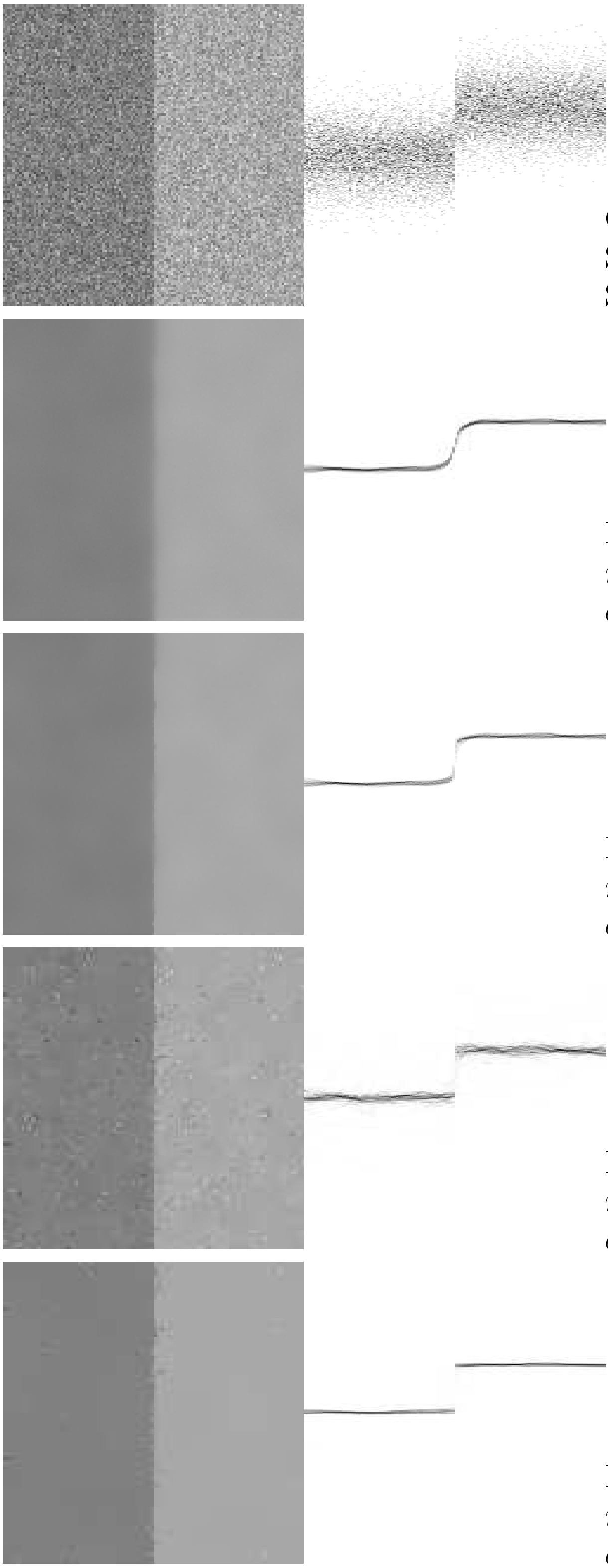
Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

Abbildung 38: Filterung einer Kante mit kleiner Höhe



Größe: 128×128 Pixel
Sprunghöhe: 40
Standardabweichung des Rauschens: 20

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 40$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 20$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 10$

Filterung mit
$\eta = 1.5$
$\sigma_x = 4.0,\ \sigma_z = 10$

Abbildung 39: Filterung einer Kante mit größerer Höhe

6.2 Zwischenergebnisse der Filterkette

Die Bilder der Abbildungen 40 und 41 wurden mit einer CCD-Kamera aufgenommen. Diese Bilder sind jeweils oben in den Abbildungen zu sehen. In den Spalten rechts und links werden dann die gefilterten Bilder der einzelnen Filterschritte der Filterkette gezeigt. Man erkennt, wie das Rauschen langsam verschwindet und die Details des Bildes bis zu einem gewissen Grad erhalten bleiben.

Im *Grundig*-Bild in Abbildung 40 ist die kleine Schrift sehr durch das Rauschen gestört. Die Linien der kleinen Buchstaben sind zum Teil nur ein Pixel breit. Mit entsprechenden Parametern kann hier die Schrift erhalten (linke Spalte) oder unterdrückt werden (rechte Spalte).

Das *Adern*-Bild in Abbildung 41 enthält eine kaum zu erkennende Ader (Pfeil), welche sich im linken Drittel durch das Bild schlängelt. Diese Ader ist auch mit einem guten Bildschirm kaum zu erkennen. In der Filterkette der rechten Spalte bleibt diese Ader jedoch erhalten, in der unteren Bildhälfte tritt diese sogar noch deutlicher hervor. Damit wird die Leistungsfähigkeit der Filterkette auch bei starkem Rauschen demonstriert. Auch die Filterkette der linken Spalte erhält die Ader, jedoch wird das Rauschen noch stärker unterdrückt. In beiden Resultaten der Filterkette konnte die Ader mit einer einfachen Kantenerkennung noch vollständig detektiert werden, diese Kantenbilder werden später gezeigt.

6.3 Ergebnisse der Filterkette

Um die Wirkung der Filterkette zu demonstrieren, werden Ergebnisse der Filterung mit der Gauß-Filterkette gezeigt. Um die Unterschiede der Filterergebnisse der Gauß-Filterkette und der linearen Gauß-Filter zu zeigen wurde zum Teil auch mit einem linearen Gauß-Filter gefiltert.

In Abbildung 42 auf Seite 89 ist das Bild des Stoffbären zusammen mit Filterergebnissen für dieses Bild zu sehen. Durch Vergleich der Bilder kann die Wirkung der Filterparameter beobachtet werden. Man sieht, wie mit zunehmendem Wert für σ_z die Glättung verstärkt wird. Wird σ_x vergrößert, so wird im allgemeinen die Glättung stärker. In der untersten Zeile der Abbildungen 42 bis 44 ist dieser Effekt jedoch kaum noch zu beobachten.

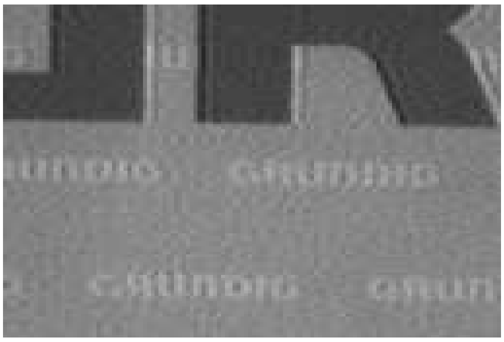
In Abbildung 45 ist ein Bild eines Fensterhebers mit 128×128 Pixeln zu sehen. Dieses Bild enthält kleine Details und eng nebeneinander liegende Kanten. Um zu demonstrieren, daß die Gauß-Filterkette kleine Strukturen erhalten kann, ist das Filterergebnis der Gauß-Filterkette für einen großen Wert des Parameters σ_x zu sehen. Betrachtet man die Filterergebnisse des linearen Gauß-Filters, so wird der Unterschied der nichtlinearen Filter zu linearen Filtern deutlich. Die Parameter der Filterungen sind jeweils angegeben.

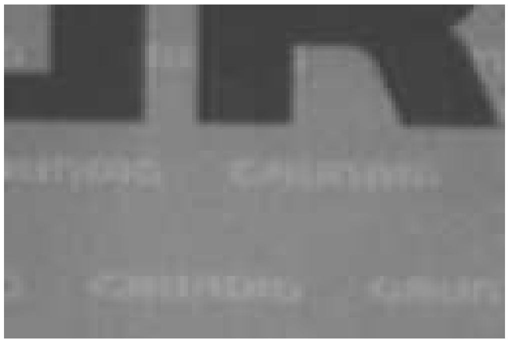
Das Bild des Radios ist für die Untersuchung der Glättung extra mit viel Rauschen aufgenommen worden. An diesen Bildern sieht man, daß auch bei guter Rauschunterdrückung kleine Bilddetails erhalten werden können. Durch das starke Rauschen im Bild können die

Kanten des Radios natürlich nicht genau lokalisiert werden. Wegen der Nichtlinearität der Gauß-Filterkette werden kaum gradlinig verlaufende Kanten zwischen den Segmenten mit einheitlichem Grauwert erzeugt.

Als weiteres Beispiel sind Ultraschallbilder gefiltert worden, welche eine Herzklappe zeigen. Aus einer Sequenz von 38 Bildern ist oben in Abbildung 47 von links nach rechts das erste, das neunte und das fünfzehnte Bild der Sequenz zu sehen. In der dritten Zeile der Abbildung ist das sechsundzwanzigste, das einunddreißigste und das vierunddreißigste Bild zu sehen. Die Bilder sind mir freundlicher Weise von Gabriel Pelle zur Verfügung gestellt worden.[2] Man sieht, daß sich die Herzklappe und damit ihre Bewegung durch die Filterung besser vom verrauschten Hintergrund abhebt. Zur Verdeutlichung der Filterwirkung ist das obere Bild der linken Spalte und das Filterergebnis dieses Bildes auch in Abbildung 48 wiedergegeben. Diese Bilder zeigen, wie die Gauß-Filterkette dazu neigt, Flächen mit konstantem Grauwert zu erzeugen, welche einen recht scharfen Rand haben.

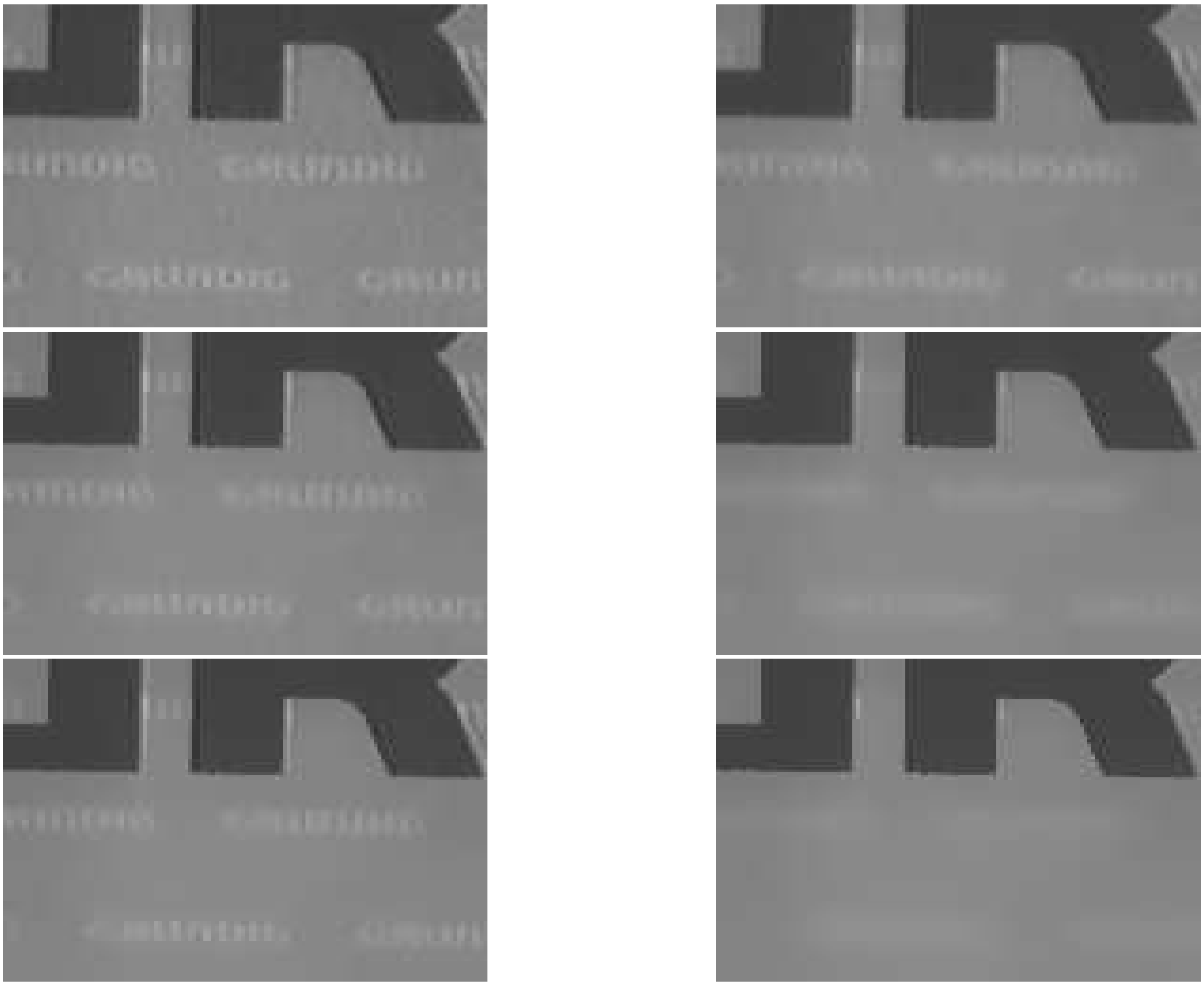
[2]Gabriel Pelle, INSERM Unite 138, CHU Henri Mondor, France, aufgenommen bei *VINGMED echograph*. Für die Herstellung des Kontaktes mit Gabriel Pelle gilt mein Dank Chahab Nastar, INRIA Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. Er half auch bei der Übertragung der Bilder.





Ausschnitt

linesres Gauß-Filter mit $\sigma = 1$

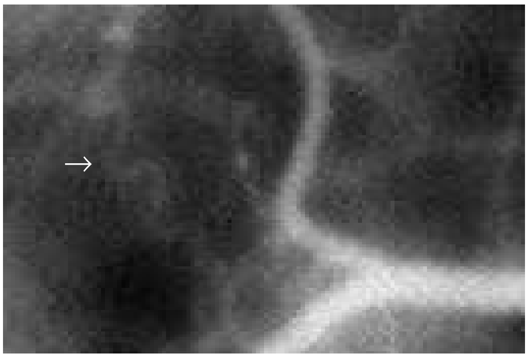


Filterkette:
$\sigma_x = 2.0,\ \sigma_z = 8.0$

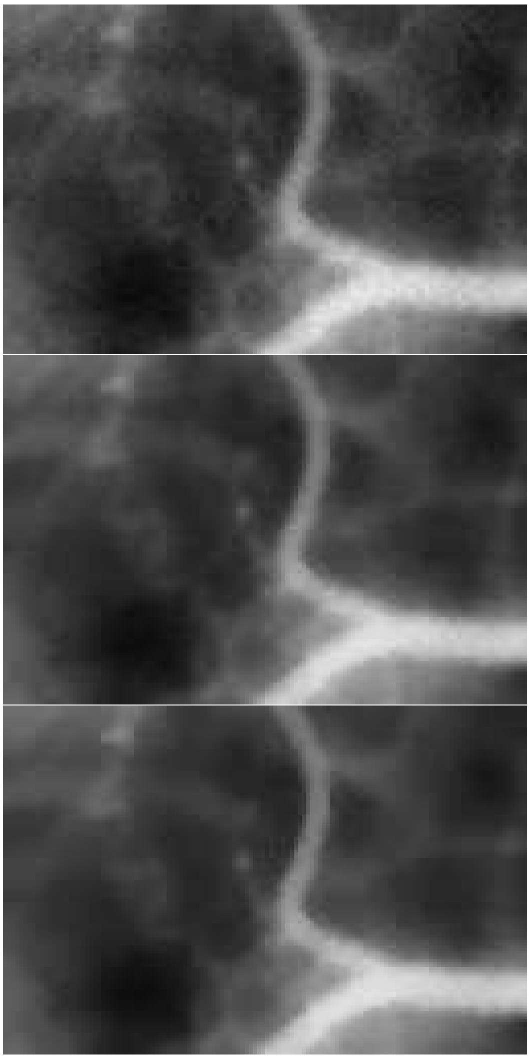
Filterkette:
$\sigma_x = 3.0,\ \sigma_z = 12.0$

Zu sehen ist ein Ausschnitt aus dem Deckblatt einer Bedienungsanleitung (128×128 Pixel).

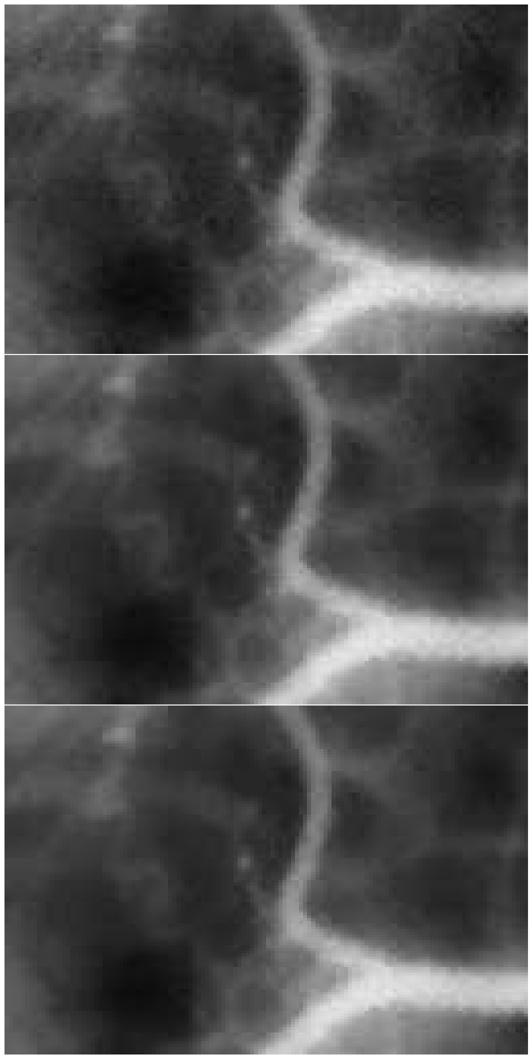
Abbildung 40: Filterergebnisse für das *Grundig*-Bild



Ausschnitt aus einem Röntgenbild mit einem Adergeflecht (128 × 128 Pixel).



Filterkette:
$\sigma_x = 1.2$, $\sigma_z = 13.0$



Filterkette:
$\sigma_x = 1.2$, $\sigma_z = 7.0$

Abbildung 41: Filterergebnisse für das *Adern*-Bild

Bild eines Stoffbären (512×512 Pixel).

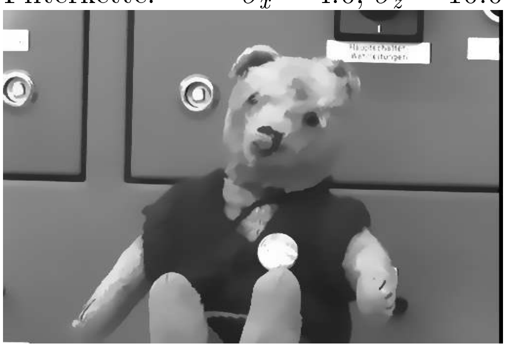
Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 5.0$

Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 5.0$

Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 10.0$

Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 10.0$

Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 15.0$



Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 15.0$

Abbildung 42: Filterergebnisse für das *Bären*-Bild mit $\eta = 1.3$

Ausschnitt des Bildes (128 × 128)

lineares Gauß-Filter: $\sigma = 1$

Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 5.0$

Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 5.0$

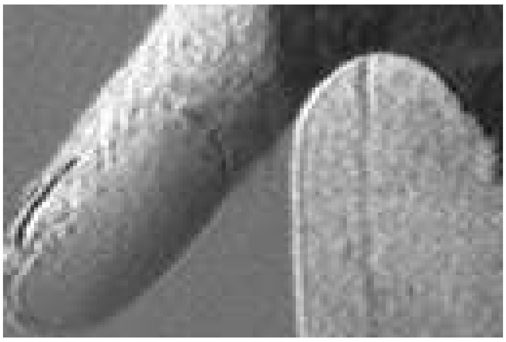
Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 10.0$

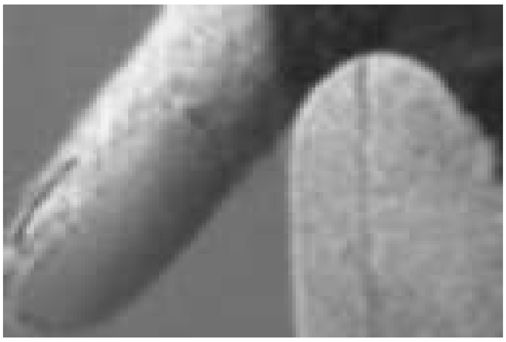
Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 10.0$

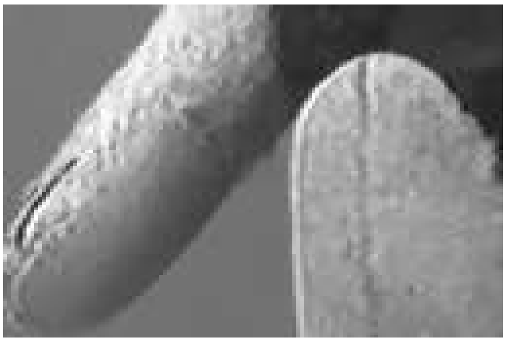
Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 15.0$

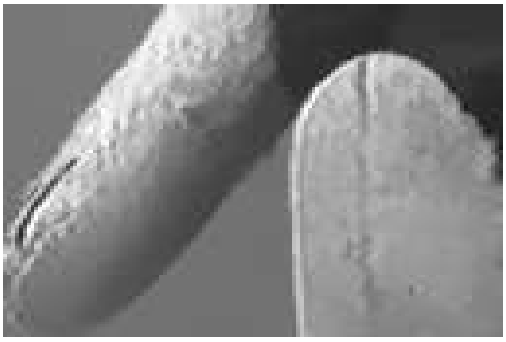
Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 15.0$

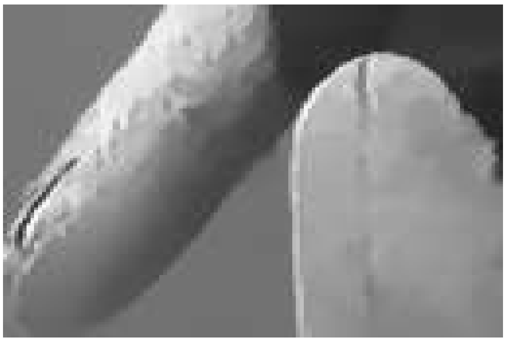
Abbildung 43: Filterergebnisse für einen Ausschnitt des *Bären*-Bildes mit $\eta = 1.3$

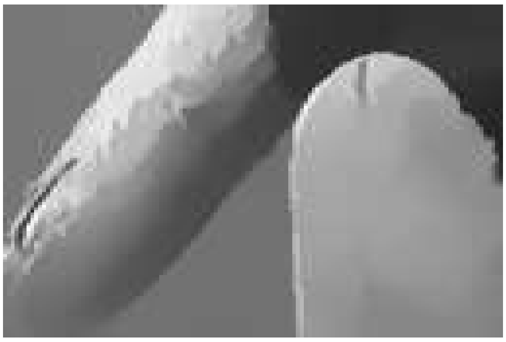

Zweiter Ausschnitt (128 × 128)

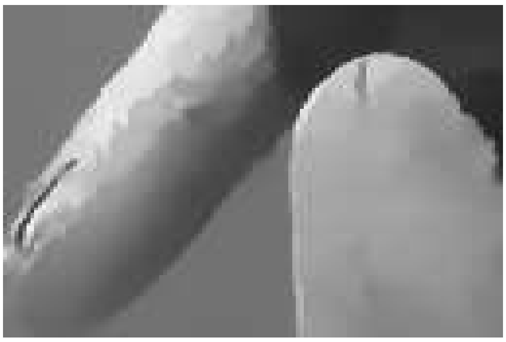

lineares Gauß-Filter: $\sigma = 1$


Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 5.0$


Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 5.0$


Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 10.0$


Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 10.0$


Filterkette: $\sigma_x = 2.0$, $\sigma_z = 15.0$

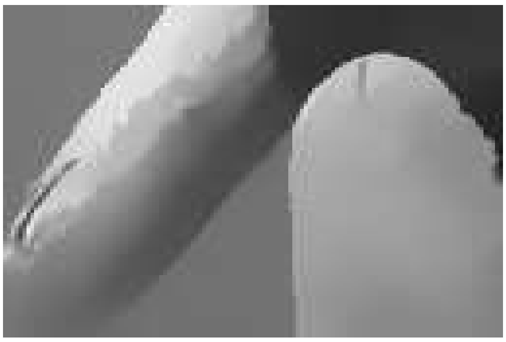
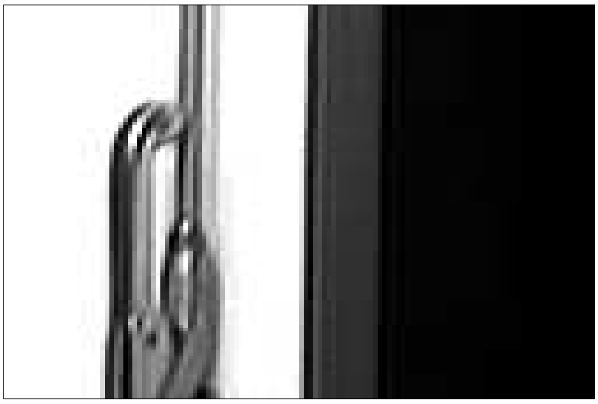
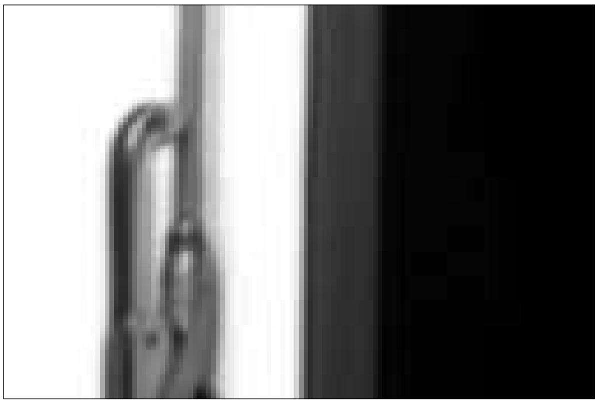

Filterkette: $\sigma_x = 4.0$, $\sigma_z = 15.0$

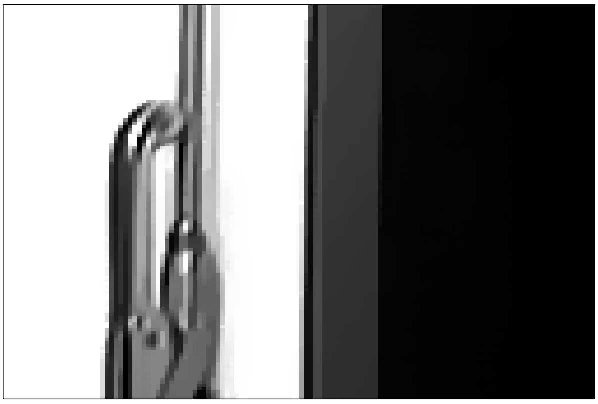
Abbildung 44: Filterergebnisse für einen Ausschnitt des *Bären*-Bildes mit $\eta = 1.3$



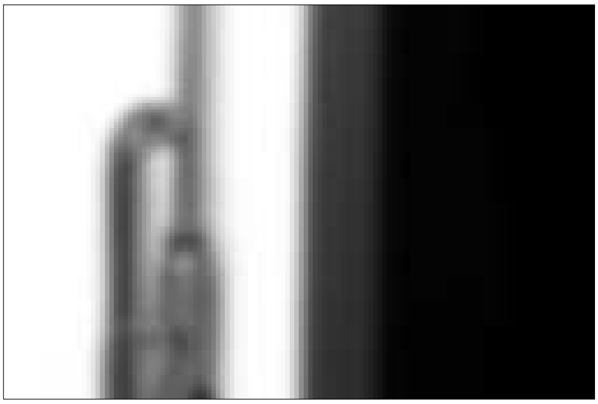
Fensterheber
(128×128 Pixel)



lineares Gauß-Filter: $\sigma = 1.0$



Gauß-Filterkette: $\sigma_x = 3.0$, $\sigma_z = 6.0$, $\eta = 1.3$



lineares Gauß-Filter: $\sigma = 2.0$

Abbildung 45: Resultate der Filterung mit einer Filterkette

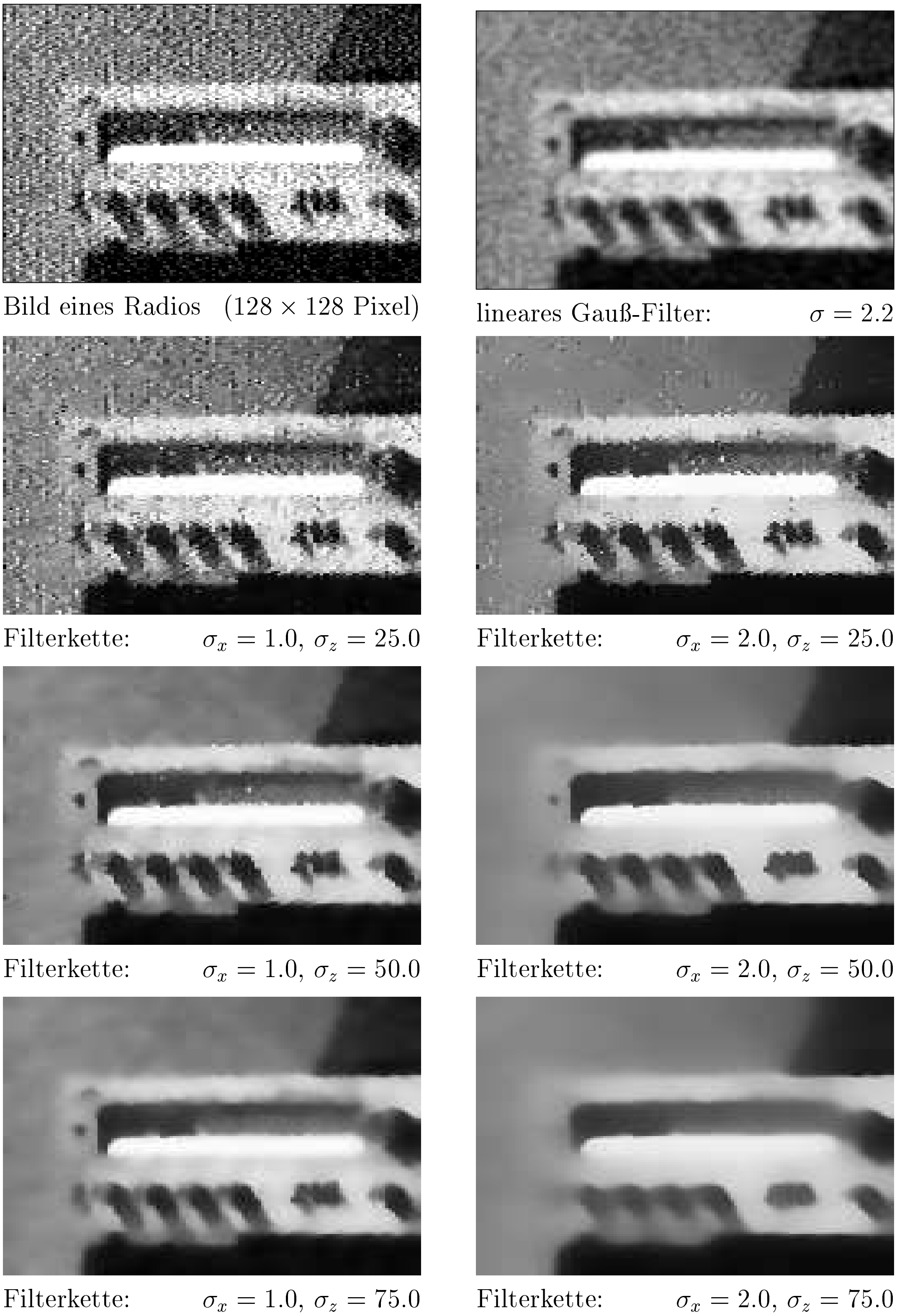
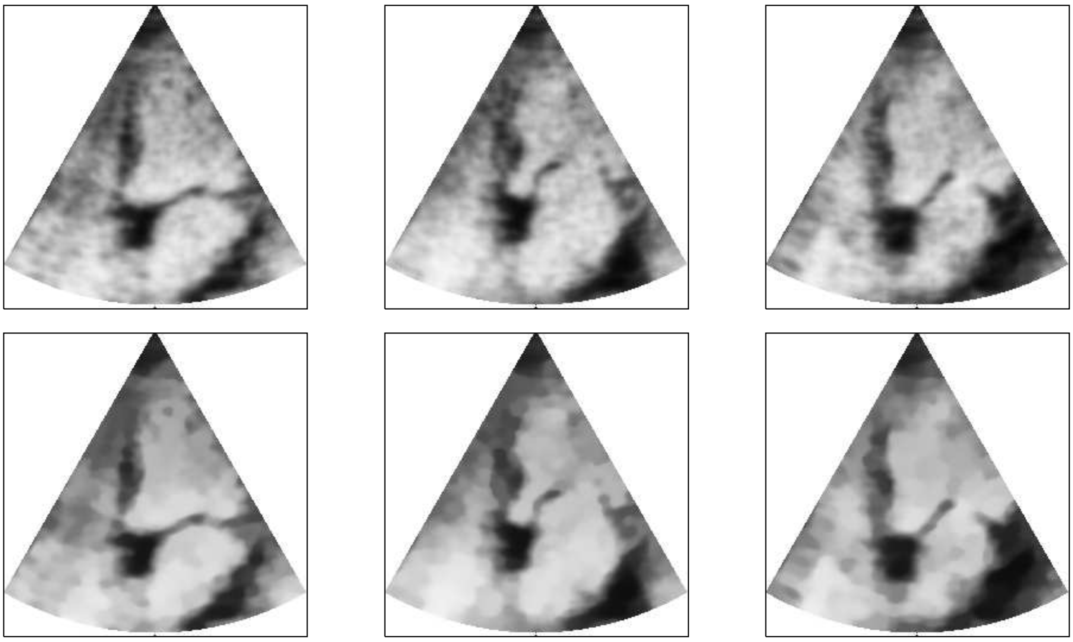
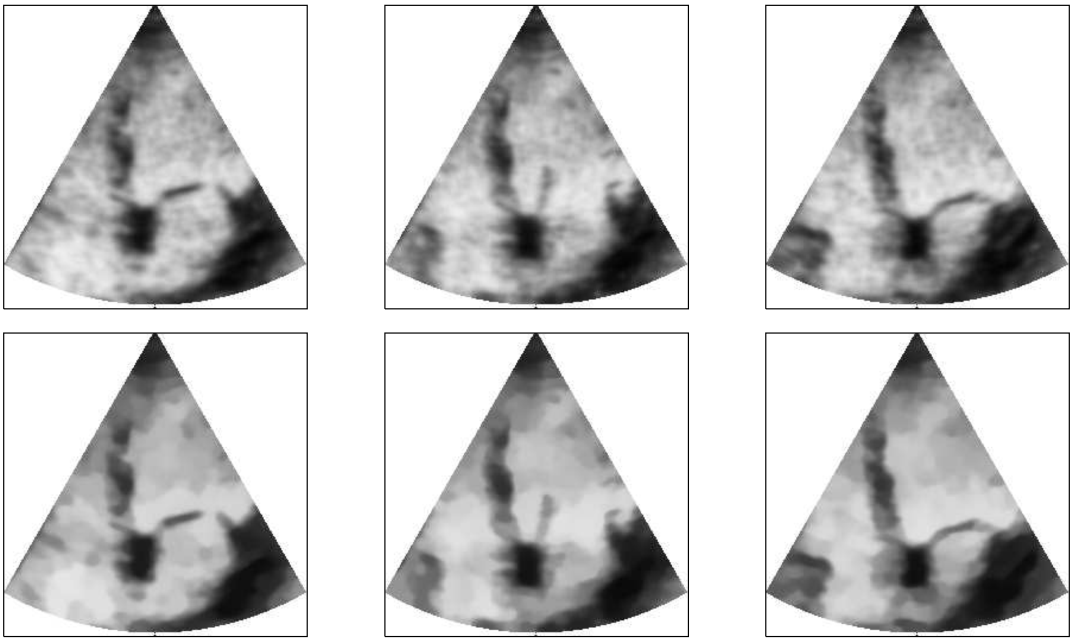


Abbildung 46: Filterergebnisse für das *Radio*-Bild mit $\eta = 1.3$

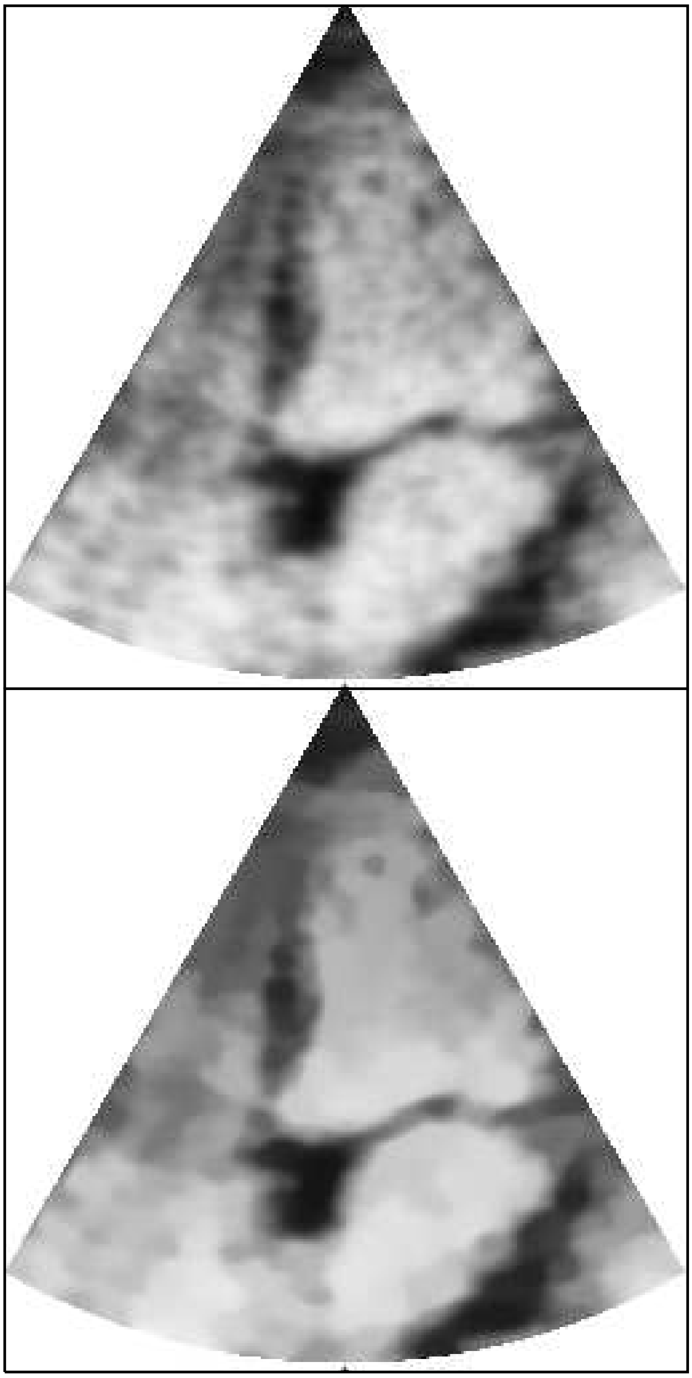


Diese Bilder zeigen in der rechten Hälfte die Bewegung einer Herzklappe.
(256×256 Pixel).



Es wurde zur Filterung die Gauß-Filterkette mit folgenden Parametern verwendet:
$\sigma_x = 3.0$, $\sigma_z = 7$, $\eta = 1.3$
Es ist jeweils das Originalbild und darunter das gefilterte Bild zu sehen. sehen.

Abbildung 47: Filterergebnisse von Ultraschallbildern einer Herzklappe



Es ist ein Bild und ein Filterergebnis aus Abbildung 47 zu sehen.
Die folgenden Parametern wurden verwendet:
$\sigma_x = 3.0$, $\sigma_z = 7$, $\eta = 1.3$

Abbildung 48: Filterergebnisse eines Ultraschallbildes einer Herzklappe

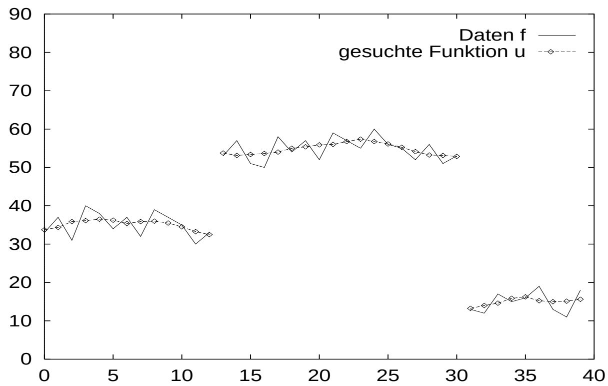
7 Vergleich des Operators

7.1 Der Operator von Blake und Zisserman

In Hinblick auf präzise Lokalisierung von Kanten formulierten Andrew Blake und Andrew Zisserman in ihrem Buch *Visual Reconstruction* [BZ87] einen Operator auf Bildern, welcher die Kanten und ein geglättetes Bild als Ergebnis einer Minimierungsaufgabe berechnet. Obwohl die Idee dieses Verfahrens von der des nichtlinearen Gauß-Filters verschieden ist, ergeben sich einige Ähnlichkeiten, aber auch Unterschiede.

Die Idee im Eindimensionalen

Als Daten sei eine stückweise stetige beschränkte Funktion auf einem Intervall $[0, N]$ gegeben. Man versuche nun f durch eine stückweise glatte Funktion u zu approximieren:



Man stellt sich die Funktion u als biegsamen Stab vor, λ sei ein Maß dafür, wie leicht dieser Stab gebogen werden kann, α ein Maß für die notwendige Kraft, um den Stab zu brechen. Minimiert werde nun die Summe aus der Energie um den Stab an einigen Stellen zu brechen, der Energie um die entstandenen Teile des Stabes zu biegen und dem Abstand des Stabes zu f. Die Biegeenergie wird zunächst durch das Integral der mit λ multiplizierten Ableitung der stetigen Stücke von u bestimmt.

Ist die Funktion nur auf den Werten $[\![0, N]\!] \subset \mathbb{N}$ definiert, so kann die Minimierungsaufgabe analog formuliert werden. Es seien f_i die Funktionswerte in den Stellen i, u_i die Funktionswerte der gesuchten Funktion u in den Stellen i, so daß der folgende Ausdruck sein globales Minimum annimmt:

$$E := \sum_{i=0}^{N}(u_i - f_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} min\{ \ \lambda^2(u_i - u_{i-1})^2 \ , \ \alpha \ \}$$

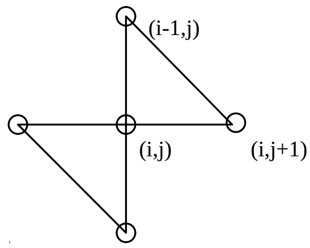
Dabei berechnet der erste Term den Abstand der Funktionen, der zweite die Energie um den Stab zu biegen oder ihn zu brechen ($\lambda(u_i - u_{i-1})^2 > \alpha$). Die Stellen, an denen das

Minimum von $\lambda(u_i - u_{i-1})^2$ und α den Wert α annimmt, werden als Kanten interpretiert.

Durch die Einführung der Bruchstellen, kann diese Aufgabe nicht mit Hilfe der Variationsrechnung gelöst werden. Es müssen Relaxationsalgorithmen verwendet werden, welche viele Iterationen benötigen. Die Energiefunktion besitzt im allgemeinen lokale Minima, Blake und Zisserman geben in ihrem Buch Algorithmen an, um das globale Minimum zu finden.

Formulierung im Zweidimensionalen, das Membranfilter

Oben wurde das Intervall in kleine Abschnitte unterteilt. Für zweidimensionale Daten schlagen Blake und Zisserman die Unterteilung der Fläche in kleine Dreiecke vor, vgl. [BZ87, Seite 114]. Jedem Pixel werden nun zwei Dreiecke zugeordnet, für welche ein Wert für die Glattheit der Funktion u berechnet wird:



Wird für jedes Dreieck, welches eine "Unstetigkeit" aufweist der Wert α zu E aufsummiert, so nimmt E gemäß der Länge der Kanten zu, vgl. Blake und Zisserman [BZ87]. Man erhält die Formel

$$\begin{aligned} E = \sum_{i,j}(u_{i,j} - d_{i,j})^2 \quad &+ \quad \sum_{i,j} min\{ \ \lambda^2(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + \lambda^2(u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 \ , \ \alpha \ \} \\ &+ \quad \sum_{i,j} min\{ \ \lambda^2(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + \lambda^2(u_{i,j} - u_{i,j-1})^2 \ , \ \alpha \ \} \end{aligned}$$

Man kann sich eine Membran vorstellen, welche den Graphen des Bildes approximiert und möglichst waagerecht verlaufen will. Der Wert E kann damit auch als die Energie interpretiert werden, welche durch die Lage der Membran gespeichert ist. Das Filter wird im folgenden daher als *Membranfilter*, E als *Energiefunktion* bezeichnet, vgl. [BZ87].

Für Bilder, auf welchen die Zeilen gleiche Grauwertverläufe haben, werden die Untersuchung des Filterergebnisses von Blake und Zisserman in [BZ87] im eindimensionalen durchgeführt. Unter der Vorraussetzung, daß auch die Zeilen im Filterergebnis gleiche Grauwertverläufe haben, gehen die Formeln des zweidimensionalen Falles auf den des eindimensionalen Falles über. Nimmt ein Term, welcher ein Minimum ermittelt, den Wert α an, so liegt das zugehörige Pixel direkt an einer Kante, welche daran vorbei läuft. Die Parameter α und λ haben also nicht die gleiche Bedeutung wie im eindimensionalen Fall und müssen daher etwas anders gewählt werden.

Es ist klar, daß senkrechte und waagerechte Kanten mit diesem Verfahren gleich behandelt werden. Diagonale Kanten werden jedoch unterschiedlich behandelt: Die Kantenhöhe, ab welcher eine Kante markiert wird, hängt von deren Richtung ab. Rückwärts-diagonale Kanten werden eher markiert als vorwärts-diagonale Kanten.

Eigenschaften des Membranfilters und Vergleich mit der Filterkette

Blake und Zisserman haben das Membranfilter im eindimensionalen untersucht. Die Aussagen für die Wahl der Parameter lassen sich aber nicht einfach vom kontinuierlichen, eindimensionalen Fall auf das Membranfilter für ein zweidimensionales Gitter übertragen. Aus diesen Untersuchungen ergeben sich für das zweidimensionale Membranfilter die folgenden qualitative Eigenschaften, vgl. [BZ87, Seite 52]:

- Der Parameter λ ist ein Wert für die „Größe" des Filter, er spielt die Rolle von σ_x der Filterkette.
- Wird die Steifheit der Membran vergrößert, indem λ und α vergrößert werden, so können Kanten mit beliebig kleiner Höhe detektiert werden.
- Für unverrauschte Rampen mit einer bestimmten Höhe und Länge können Parameter angegeben werden, so daß diese Rampe als eine oder mehrere Kanten (Treppe) wiedergegeben werden.
- Werden im Bild keine Kanten markiert, so verhält sich das Filter wie ein linearer Operator.

Bemerkung 7.1 (Vergleich) *Das Membran-Filter ist in der Lage, Rauschen zu glätten und gleichzeitig Kanten zu detektieren. Die Gauß-Filterkette detektiert dagegen keine Kanten. Da die Filterkette die Kanten im Bild gut erhält, können die Kanten in weiteren Filterschritten detektiert werden. Mit beiden Verfahren lassen sich Kanten beliebiger Höhe erhalten, indem die Filtergröße entsprechend groß gewählt wird. Im Vergleich mit dem linearen Gauß-Filter, erlaubt die Gauß-Filterkette und das Membranfilter eine bessere Lokalisierung von Kanten.*

Das lineare Gauß-Filter und das Membranfilter hinterlassen auf dem Filterergebnis wie auch die Gauß-Filterkette ein gewisses Rauschen. Wegen der unterschiedlichen Parameter, kann das Rauschen nicht unmittelbar verglichen werden.

Das lineare Gauß-Filter ist am einfachsten zu implementieren. Die Gauß-Filterketten sind auch leicht zu implementieren, da die Berechnungsvorschrift direkt umgesetzt werden kann. Das Membranfilter muß so implementiert werden, daß das globale Minimum gesucht wird. Blake und Zisserman geben in [BZ87] Algorithmen für die Implementation an. Es ergibt sich für das Membranfilter ein hoher Rechenaufwand, da das globale Minimum der Funktion mit Hilfe eines Relaxationsverfahrens gesucht wird, was viele Iterationen notwendig macht.

Bemerkung 7.2 *Das Membranfilter hat gegenüber der Gauß-Filterkette die folgenden Nachteile:*

- *Es gibt Bilder, zu denen es mehrere globale Minima des Energiefunktionals gibt.*
- *Die Detektion von Kanten, und damit auch die Glättung des Bildes, hängt nicht nur von der Kantenhöhe, sondern auch von der Kantenrichtung ab.*
- *Die Parameter des Membranfilters sind nicht so leicht interpretierbar wie die der Gauß-Filterkette.*

7.2 Das Filter von Saint-Marc, Chen und Medioni

Im Abschnitt 3.4 auf Seite 19 ist das Filter $\tilde{G}$ vorgestellt worden, welches die Filtergewichte nur mit Hilfe der Grauwertdifferenzen berechnet. Wählt man für die Umgebung $U(p)$ das zentrale Pixel p mit seinen 8 direkten Nachbarn, so erhält man ein Filter, welches von Philippe Saint-Marc, Jer-Sen Chen und Gerard Medioni in [SMCM91] untersucht wurde. Da die Filterumgebung recht klein ist und daher auch das Rauschen nur wenig geglättet wird, wird in [SMCM91] die Iteration des Filters vorgeschlagen. Es sind aber sehr viele Iterationen nötig. In [SMCM91] wird ein Testbild und das Filterergebnis nach 220 Iterationsschritten gezeigt, wobei der Parameter σ_z während der gesamten Iteration nicht verändert wurde. Wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, bewirkt gerade die Veränderung der Filterweite bei gleichzeitiger Änderung der Gewichtung der Grauwertdifferenzen eine gute Versteilerung der Kanten. Es lassen sich daher mit Hilfe des nichtlinearen Gauß-Filter bessere Filterergebnisse erzielen.

8 Kantendetektion nach der Filterkette

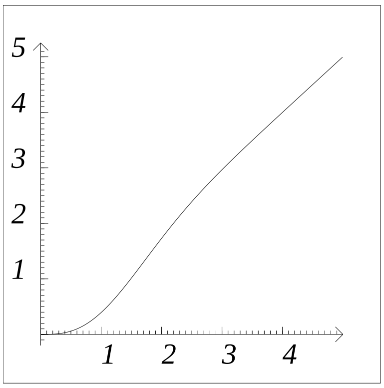
Die einfachste Möglichkeit Kanten zu detektieren, besteht im Vergleich von Grauwerten benachbarter Pixel mit einem Schwellwert. Das Überschreiten des Schwellwertes durch die Grauwertdifferenz wird dann als Kante interpretiert. Es ist klar, daß man das Rauschen nur so weit glätten muß, daß die Amplitude des Rauschens höchstens die Hälfte des Schwellwertes beträgt.

Um Kanten mit geringer Höhe zu erhalten muß der Parameter σ_z der Gauß-Filterkette oft so klein gewählt werden, daß nach der Glättung das Rauschen noch nicht ganz verschwunden ist. Die Erkennung einer Kante sollte also auch durch einen robusten Operator erfolgen, welcher nur dann einzelne Pixel markiert, wenn diese sich deutlich von ihren Nachbarn abheben.

Man könnte nun die Grauwertdifferenzen eines Pixels zu seinen Nachbarn aufsummieren. Enthält ein Bild eine Kante, so erhalten die Pixel auf beiden Seiten der Kante einen Wert mit jeweils einem anderen Vorzeichen zugewiesen. Ist noch leichtes Rauschen im Bild vorhanden, so sollte man kleine Grauwertdifferenzen unberücksichtigt lassen. Dies könnte mit einer geeigneten Funktion zur Gewichtung der Differenzen geschehen. Diese Funktion sollte natürlich stetig sein, damit der Operator resistent gegen kleine Änderungen der Grauwerte ist. Es entsteht so ein Filter, dessen Formel dem nichtlinearen Gauß-Filter nahe kommt. Es kann auch hier wieder mit der Gauß-Funktion gearbeitet werden. Als Funktion werde nun

$$h_z(x) = 1 - \frac{1}{\psi(0)}\psi(x)$$

verwendet. Der folgende Graph veranschaulicht die Funktion $x \to x \cdot h_z(x)$:



Es ergibt sich mit dieser Funktion die folgende Darstellung für das Filter:

$$F_{\sigma_x,\sigma_z,\eta} f(x) = \eta \sum_{q \in P} (f(q) - f(p)) g(q) \left[1 - \frac{\psi(f(q) - f(p))}{\psi(0)} \right]$$

Liegt nun ein Pixel p_0 direkt neben einer Kante, so wird das Filter für $Ff(p_0)$ einen Wert liefern, der im Verhältnis zu seinen Nachbar einen großen Betrag hat; das Vorzeichen hängt

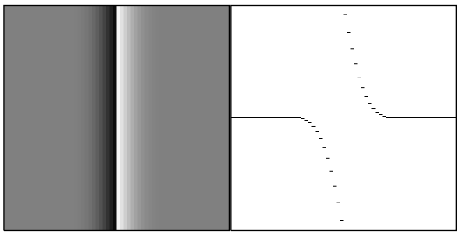


Abbildung 49: Ausgabe des Kantenfilters für ein Kantenbild

davon ab, auf welcher Seite der Kante sich das Pixel befindet. Die Implementierung dieses Filters wurde als Operator auf der Menge $Abb(\mathcal{P}, [\![0, 255]\!])$ vorgenommen. Dazu wurden die Werte der Pixel im gefilterten Bild um 128 erhöht und dann durch runden und abschneiden angepaßt. In Abbildung 49 ist die Ausgabe des Filters für ein Kantenbild zu sehen.

Werden mit einem weiteren Filter die Pixel in einem Bild geschwärzt, welche einen rechten oder unteren Nachbarn haben, dessen Grauwert ein anderes Vorzeichen hat und die Differenz der Werte einen bestimmten Betrag überschreitet, so entsteht ein Bild, in welchem die Kanten zu sehen sind. Mit diesem Vorgehen konnten Kanten gefunden werden, welche sich nur schwach vom Hintergrund abheben.

Als Beispiel betrachten wir hier die Röntgenaufnahme aus Abbildung 3 auf Seite 9. Das Bild enthielt viel Rauschen, so daß die Adern zum Teil auf dem Monitor nur aus einiger Entfernung zu sehen waren. Es ist in Abbildung 50 zunächst ein Ausschnitt des Bildes zu sehen, auf welchem das Filter getestet wurde. Bei der Filterung wurde das Rauschen nur soweit unterdrückt, daß die Adern erhalten blieben.

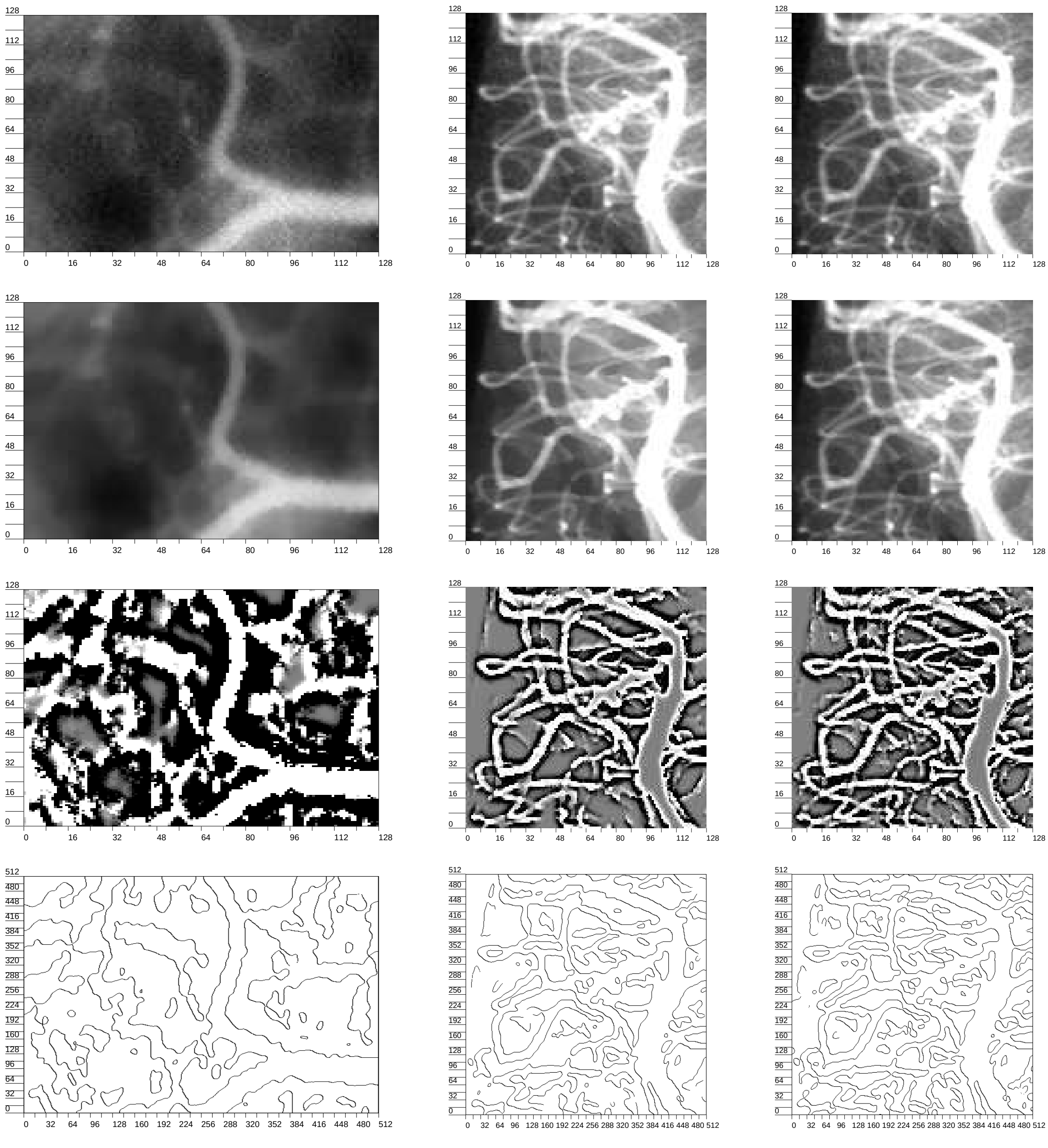
Da die Adern nur wenige Pixel breit sind, wurde nach der Glättung das Bild auf die vierfache Seitenlänge vergrößert, indem aus jedem Pixel ein Feld mit 16 Pixeln gleichen Grauwertes erzeugt wurde. Nach einer Filterung mit einem linearen Gauß-Filter mit sehr kleinem Parameter $\sigma \leq 2.0$ wurde dann das oben besprochene Filter angewendet. Dieses Vorgehen hilft für Bilder mit schmalen Linien, da in einem Bild nur in etwa halb so viele Pixel wie Grenzen zwischen ihnen existieren. Wird das Bild auf dem Bildschirm mit den detektierten Kanten überlagert, so sind durch diesen Trick die Linien so schmal, daß die Grauwerte des Bildes noch gut zu sehen sind. Die Filterung mit dem linearen Gauß-Filter läßt Ecken leicht rund erscheinen. Unterscheidet sich der Grauwert eines Pixels stark von allen Grauwerten der Pixel seiner Umgebung, so wird dieses Pixel wegen der linearen Filterung eher als Kreis als als Quadrat wiedergegeben.

Es wurden dann Vorzeichenwechsel benachbarter Pixel, deren Werte eine Schwelle überschreiten, markiert. Zusammen ergeben diese markierten Stellen eine Kanteninformation zum ursprünglichen Bild. Die Kanten sind nun wie oben beschrieben in Abbildung 50 zu sehen.

Es ist mit Hilfe des oben beschriebenen Operators eine Kantendetektion für das *Radio*-Bild durchgeführt worden. Gleichzeitig wurde die Kantendetektion zu Vergleich mit Hilfe des Operators von Canny durchgeführt. Dazu wurde die Software `vista`[3] der *University of British Columbia* verwendet, welche auch eine Implementierung des Operators von Canny enthält. In Abbildung 51 sind die Ergebnisse der Kantendetektion zu sehen. Man sieht, wie die Kanten durch die lineare Filterung des Filters von Canny geradliniger werden. Da nicht klar ist, wo das Radio-Bild Kanten aufweist, können die Bilder schlecht bewertet werden. Es zeigt sich aber doch die gute Wirkung der Gauß-Filterkette als Vorbereitung der Kantendetektion. Die Ergebnisse der anschließenden Kantendetektion sind sowohl für das oben beschriebene nichtlineare Filter, als auch für den Operator von Canny dargestellt.

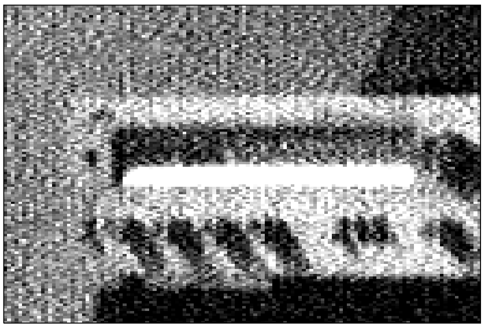
Bemerkung 8.1 (Kantendetektion) *In den Abbildungen 50 und 51 ist zu sehen, daß die Gauß-Filterkette neben der Glättung des Rauschens auch die Detektion der Kanten vorbereitet.*

[3] Quelle der Software: `ftp.cs.ubc.ca:/pub/local/vista/vista-2.0.2.tar.gz`

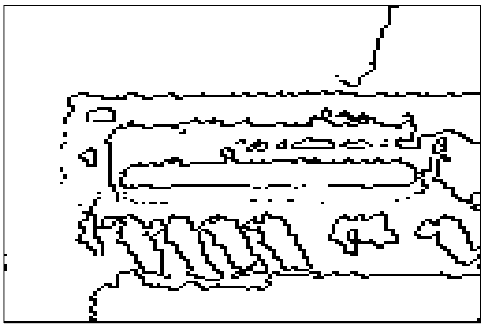


– Kanten von Adern-Bildern –
Es sind jeweils die einzelnen Stufen der Kantendetektion zu sehen.

Abbildung 50: Beispiele der Kantenerkennung

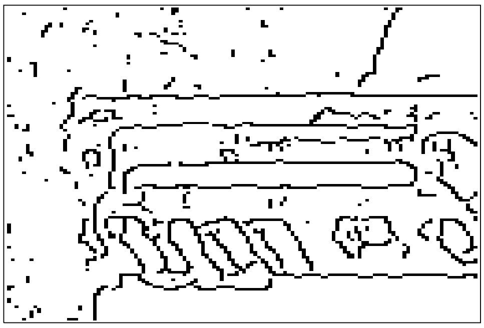


Radio (128×128)

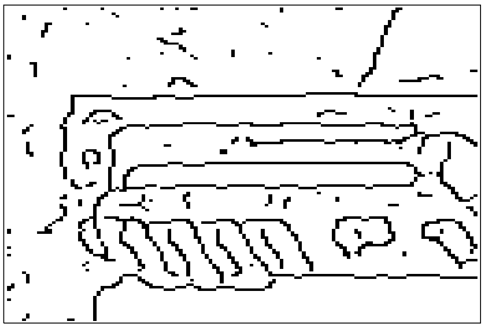


nichtlinearer Detektor nach einer Gauß-Filterkette mit: $\sigma_x = 1.5, \sigma_z = 50, \eta = 1.3$

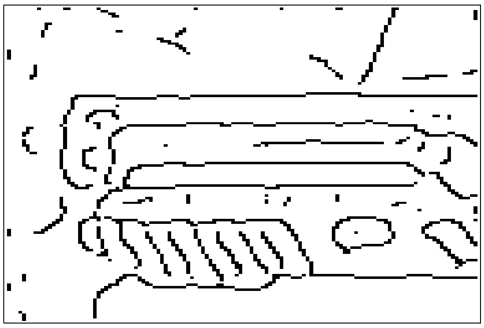
Detektor nach Canny mit $\sigma = 1$



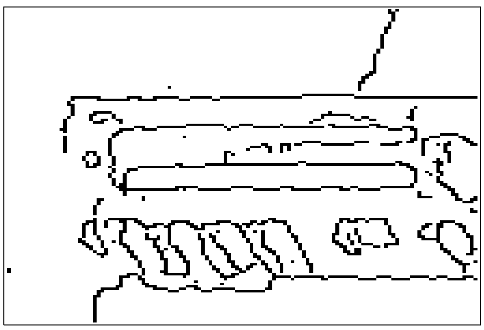
Detektor nach Canny mit $\sigma = 1.5$



Detektor nach Canny mit $\sigma = 2$



Detektor nach Canny mit $\sigma = 2.5$



Gauß-Filterkette und Detektor nach Canny
$\sigma_x = 1.5, \sigma_z = 50, \eta = 1.3, \sigma = 1$

Abbildung 51: Detektierte Kanten im Vergleich

9 Bemerkungen

9.1 Verbesserungen

Um das Rauschen des Bildes zu glätten, muß der Parameter σ_z der Gauß-Filterkette eine gewisse Größe haben. Es wurde auch gezeigt, daß die Erhaltung von Kanten vom Parameter σ_z abhängt, welcher hierfür möglichst klein gewählt werden sollte. Ist das Rauschen des Bildes bekannt, so können die Parameter der Gauß-Filterkette entsprechend gewählt werden.

Anstatt den Wert σ_z für alle Berechnungen von $Gf(p)$ eines Filterschrittes festzulegen, könnte man diesen auch in Abhängigkeit der Grauwerte in der Umgebung des zentralen Pixels p jeweils neu festlegen. Es ist aber nicht einfach, das Rauschen zu schätzen, insbesondere dann nicht, wenn man nicht weiß, ob die Schätzung durch eine Kante in der Nähe des Pixels verfälscht wird. In [Fle92b] ist ein solches adaptives Verfahren vorgestellt worden. Die Untersuchungen des nichtlinearen Gauß-Filters führen zur Vermutung, daß dieses adaptive Verfahren mit einer Iteration, in welcher die Filtergröße erhöht wird, noch besser funktioniert.

Für die Glättung ist der Anteil des Gewichtes des zentralen Pixels am Gesamtgewicht der Summe wichtig. Durch die Nähe einer Kante wird dieser Anteil erhöht (viele Gewichte der Nachbarpixel sind klein) und damit die Glättung verringert. Es wäre eventuell sinnvoll, den Anteil des Gewichts des zentralen Pixels am Gesamtgewicht der Summen für alle Pixel festzulegen. Dies könnte durch eine Änderung der Normierung der Gewichte erfolgen.

Ist das Rauschen von sehr großer Varianz, so scheint es gerechtfertigt, zunächst mit einem linearen Gauß-Filter das Rauschen zu glätten. Dabei sollte die Filterweite zunächst sehr klein gewählt werden. Dann kann mit der Filterkette bei größerer Filterumgebung weiteres Rauschen geglättet werden. Insbesondere bei starkem Rauschen und kleinen Bilddetails, welche unterdrückt werden sollen (z.B. die Struktur des Fells des Bären in Abbildung 3), ist dieses Verfahren von Vorteil.

9.2 Implementierung der Filterkette

Wegen der großen Datenmengen ist in der Bildverarbeitung stets mit großen Rechenzeiten für jede Filterung zu rechnen. Eine schnelle Implementation der Verfahren ist daher für den praktischen Einsatz von Bedeutung. Das nichtlineare Gauß-Filter und der Kantendetektor besitzen die folgenden Eigenschaften, welche zur effizienten Implementierung genutzt werden können:

Lokalität der Operationen: Der Grauwert des gefilterten Bildes hängt nur von den Grauwerten einer kleinen Umgebung des zu filterndes Bildes ab. Die Filterung kann also auf die Filterung von Teilbildern (jedoch mit überlappenden Pixelmengen) zurückgeführt werden.

Synchronität: Die Dauer der Berechung der Summen hängt nicht von den Daten ab. Bei einer Bearbeitung der Filterung mit mehreren Prozessoren kann die Last statisch verteilt werden. Die Dauer der Filterung kann aus den Parametern berechnet werden.

Wenige Gewichte: Die Gewichtsfunktion ist von der Differenz der Pixel und der Differenz der Grauwerte abhängig. Werden die Grauwerte nach jeder Filterung gerundet, so sind beide Differenzen ganzzahlig. Es werden also nur endlich viele verschiedene Terme der Form $g(q-p)\psi(f(q)-f(p))$ verwendet. Durch geeignete Datenstrukturen kann die Berechnung dieser Terme als Speicherzugriff realisiert werden.

Diese Eigenschaften lassen sich auf den verschiedenen Computer-Systemen unterschiedlich nutzen.

Stehen zur Filterung mehrere Prozessoren zur Verfügung, so kann jeder Prozessor einen Teil der Grauwerte des gefilterten Bildes berechnen. Haben die Prozessoren keinen gemeinsamen Speicher, so bekommt jeder Prozessor etwas mehr als ein Teilbild zur Verarbeitung. Beispiele für solche Rechnerarchitekturen sind Transputer-Netzwerke, in denen die speziellen Prozessoren, die Transputer, durch extrem schnelle Nachrichtenverbindungen zu einem Netzwerk verknüpft sind. Für die Berechnung der Filterkette muß nach den einzelnen Filterschritten wieder eine Aufteilung des Bildes vorgenommen werden.

Werden die Bilddaten als zweidimensionales Array angesprochen, so muß jeweils eine ganzzahlige Multiplikation für die Adressberechnung der Speicherzugriffe durchgeführt werden. Mit vielen Prozessoren ist die ganzzahlige Multiplikation im Vergleich zur Addition recht langsam (z.B. Sparc, Motorola mc680x0). Um den Speicherzugriff zu beschleunigen, sollte entweder die Größe der Bildzeilen bei der Übersetzung des Programmes bekannt und eine Zweierpotenz sein, so daß der Optimierer sie durch eine Schiebeoperation ersetzten kann, oder die Multiplikationen sollten durch geschickte Programmierung umgangen werden.

Legt man die Gewichte in einer geeigneten Datenstruktur ab, so kann der ganzzahlige Abstand des gerade verwendeten Pixels zum zentralen Pixel und die Grauwert-Differenz als Index für den Zugriff auf den Wert des Gewichtes verwendet werden. Mit Hilfe von Tabellen (zweifach indirektem Zugriff) kommt man auch hier ohne Multiplikationen aus. Da meine ersten Implementierungen der Filter auf Rechnern mit einem Prozessor des Typs Motorola mc68020 durchgeführt wurden, habe ich darauf geachtet, daß während der Filterung keine Multiplikationen durchgeführt werden. Die Geschwindigkeit der Programme konnte so gesteigert werden.

Da die Grauwerte ganzzahlig und kleiner als 255 sind, kann man die Gewichte so skalieren, daß ohne große Rundungsfehler die Summen kleiner als 2^{31} bleiben. Die gesamten Rechnungen können so in ganzzahliger Arithmetik durchgeführt werden.

Auf neueren Prozessoren (RISC) ist ein Speicherzugriff genau so schnell wie eine Multiplikation für reelle Zahlen, so daß hier die Verwendung von großen Tabellen keinen Sinn mehr macht.

Zur Berechnung einer Filterung eines Bildes mit 512×512 Pixeln benötigt das nichtlineare Gauß-Filter die folgende Rechenzeit:

σ_x	Sun Sparc-Station 10/40	Sun Sparc-Classic	Apollo DN4000 (mc68020/25MHz)
1	10s	15.6s	70s
2	26.3s	56.4s	375.4s
3	56s	116s	788s

9.3 Kantenrichtungen

In Abbildung 50 ist in der vorletzten Zeile ein Bild zu sehen, welches zur Detektion der Kanten verwendet wurde. Sind in diesem Bild die Vorzeichenwechsel detektiert worden, so kann mit Hilfe der Ableitung der Gauß-Funktion die Gradientenrichtung in diesem Bild an den Stellen der gefundenen Vorzeichenwechsel ermittelt werden. Ich habe auch Experimente hierzu durchgeführt. Es zeigte sich eine hohe Güte der ermittelten Richtungen der Kanten.

Die Güte der Kantenrichtungen ist nicht mit der Güte anderer Verfahren verglichen worden.

10 Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist ein neues Verfahren zur Bildrekonstruktion vorgestellt worden. Es wurde dazu in zwei Schritten vorgegangen:

Zunächst wurde ein neues Filter vorgestellt, welches zu den nichtlinearen Glättungfiltern gehört. Die Untersuchungen des Filters haben gezeigt, wie man die Parameter der Filterung wählen muß, um Rauschen zu glätten, bzw. Kanten im Ergebnis steiler erscheinen zu lassen. Dadurch können Kanten auch dann erhalten bleiben, wenn das Rauschen in seiner Amplitude größer ist als die Sprunghöhe der Kante. Da die theoretischen Untersuchungen zur Glättung des Rauschens mit einem Wahrscheinlichkeitsmodell durchgeführt wurden, welches die Grauwerte als standardisiert normalverteilt annimmt, wurde die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Wahrscheinlichkeitsmodell untersucht. Es konnte gezeigt werden, daß die Erwartungswerte der Pixel im gefilterten Bild lokal Lipschitz-stetig von der Wahl der Verteilungsfunktion für das Wahrscheinlichkeitsmodell abhängt. Weitere Untersuchungen haben gezeigt, daß das nichtlineare Gauß-Filter robust ist. Gegenüber dem linearen Gauß-Filter, welches vom Parameter σ_x abhängt, hat das nichtlineare Gauß-Filter einen zusätzlichen Parameter σ_z zur Bewertung der Grauwert-Differenzen der Pixel. Auf Grund der geschickten Darstellung konnte überraschender Weise zur Filtervorschrift ein Faktor η hinzugefügt werden, der die Wirkung der Glättung verbessert.

Im zweiten Schritt wurde gezeigt, wie man durch eine geschickte mehrfache Verwendung des nichtlinearen Gauß-Filters die Wirkung der Filterung verbessern kann. Jede einzelne Anwendung des Filters wird in diesem Zusammenhang Filterschritt genannt, die mehrfache Anwendung Gauß-Filterkette. Dabei wird das Filter nicht einfach iteriert, wie es in der Literatur oft vorgeschlagen und untersucht wurde. Gerade durch die Veränderung der Filterweite (d.h. des Parameters σ_x des Operators) konnte das Ergebnis der Filterung verbessert werden. Obwohl die Versteilerung von Kanten für einige Filter bekannt ist, ist mir keine Arbeit bekannt, welche die mehrmalige Verwendung eines nichtlinearen Filters bei Vergrößerung der Filterweite untersucht. Da auch das Rauschen mit jedem Filterschritt kleiner wird, wird auch der Parameter σ_z in jedem Filterschritt verkleinert. Die Untersuchung der Glättungswirkung der Filterkette wurde mit Hilfe eines Testbildes untersucht. Für normalverteiltes Rauschen konnten quantitative Angaben zur Wahl der Parameter gemacht werden. Anhand einer Kante konnte auch gezeigt werden, wie die Parameter der Filterkette das Filterergebnis beeinflussen.

Um zu demonstrieren, daß das Filter auch für die Praxis taugt, wurden aus der großen Anzahl von mir vorliegenden Filterergebnissen einige typische ausgewählt und mit den zugehörigen Filterparametern abgedruckt.

In einem Vergleich mit anderen Filtern konnte gezeigt werden, daß die Verwendung der vorgestellten Filterkette Vorteile gegenüber den anderen Filtern bringt. Gerade gegenüber der reinen Iteration von Filtern bietet die Filterkette eine gute Versteilerung der Kanten. Die Filterung wird nicht von Kantenrichtungen im Bild beeinflußt, wie dies im Verfahren von Blake und Zisserman der Fall ist. Gegenüber den Verfahren, bei denen das gefilterte Bild als Lösung einer Differentialgleichung berechnet wird, hängt die Rechenzeit der Filterkette nur von seinen Parametern ab.

Ein weiterer Vorteil des Verfahrens ist, daß die Parameter direkt interpretierbar sind und man wegen der wenigen Iterationsschritte die Wirkung der Filterung recht gut vorherbestimmen kann. Kanten welche eng nebeneinander im Bild liegen, bleiben bei entsprechender Kantenhöhe im Bild erhalten.

Es zeigte sich, daß analog zum nichtlinearen Gauß-Filter ein Differenzenfilter zur Kantendetektion konstruiert werden kann, welches ebenfalls robuste Eigenschaften zeigt. Für einige Röntgenbilder mit viel Rauschen wurden mit Hilfe der Filterkette und dieser Kantendetektion die Ränder der Adern markiert. Die Filterkette leistet also auch als erster Schritt für eine Kantendetektion gute Dienste.

A Gauß-Identitäten

A.1 Faltung zweier Gauß-Funktionen

Für $\sigma \in I\!R$ bezeichne φ_σ die folgende Gauß-Funktion:

$$\varphi_\sigma \quad : \quad x \mapsto \frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right)$$

Für σ, $\gamma \in I\!R$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma * \varphi_\gamma(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\sigma(s)\varphi_\gamma(t-s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x-t}{\gamma}\right)^2\right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2 x^2}{\sigma^2\gamma^2} + \frac{\sigma^2 x^2}{\sigma^2\gamma^2} - \frac{2xt}{\gamma^2} + \frac{t^2}{\gamma^2}\right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2\gamma^2}\left((\gamma^2+\sigma^2)x^2 - 2\sigma^2 xt + \frac{\sigma^4}{\sigma^2+\gamma^2}t^2 - \frac{\sigma^4}{\sigma^2+\gamma^2}t^2 + \sigma^2 t^2\right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2\gamma^2}\left(\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}x - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}t\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\sigma^2}{\gamma^2(\sigma^2+\gamma^2)}\right)t^2\right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2+\gamma^2}{\sigma^2\gamma^2}\left(x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\gamma^2}t\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2+\gamma^2}t^2\right)} dx \\
&= e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2+\gamma^2}t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\gamma} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+\gamma^2}{\sigma^2\gamma^2}x^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2+\gamma^2}t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}}\right)^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}\right)^2} \\
&= \varphi_{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}(t) \qquad (21)
\end{aligned}$$

A.2 Gauß-Funktionen und ihre Ableitungen

Für $\sigma \in I\!R$ sei sei φ_σ die folgende Gauß-Funktion:

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} \tag{22}$$

Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \varphi'_\sigma(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}(-\frac{x}{\sigma^2})e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} = -\frac{x}{\sigma^2}\varphi_\sigma(x); \quad (23)\\ \varphi''_\sigma(x) &= -\frac{1}{\sigma^2}\varphi_\sigma(x) - \frac{x}{\sigma^2}\varphi'_\sigma(x) = \frac{(\frac{x}{\sigma})^2 - 1}{\sigma^2}\varphi_\sigma(x) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\sigma^2 \cdot \parallel \varphi'_\sigma \parallel = \parallel \varphi'_1 \parallel, \text{ weil } \sigma^2 \varphi'_\sigma(x) = -x\varphi_\sigma(x) = -\frac{x}{\sigma}\varphi_1(\frac{x}{\sigma}) = \varphi'_1(\frac{x}{\sigma})$$

A.3 Spezielle Integrale

Sind $\psi := \varphi_{\sigma_z}$ und $\varphi := \varphi_1$ Gauß-Funktionen so gilt mit Hilfe der Formel (21) und (23):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}(t-s)\psi(t-s)\varphi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} -(s-t)\psi(s-t)\varphi(t)dt \\ &= \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{(s-t)}{\sigma_z^2}\psi(s-t)\varphi(t)dt \\ &= \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(s-t)\varphi(t)dt \\ &= \sigma_z^2 \left[\psi * \varphi\right]'(s) \\ &= \sigma_z^2 g'_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(s) \quad (25) \\ &= -s\frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1} g_{\sqrt{\sigma_z^2+1}}(s) \end{aligned}$$

Wegen $\int_{-\infty}^{\infty} \psi''(x)dx = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi''(x)|dx &= -2\sigma_z^2 \int_{-\sigma_z}^{\sigma_z} \psi''(x)dx \\ &= 4\sigma_z^2\psi'(-\sigma_z) \\ &= 4\sigma_z\psi(-\sigma_z) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi e}} \quad (26) \end{aligned}$$

B Versteilerung einer ungeraden Funktion

In Beweis von Lemma 4.34 ist die folgende Gleichung nur für das nichtlineare Gauß-Filter nachgewiesen worden. Natürlich hätte man statt der Gauß-Funktion zur Gewichtung der Grauwertdifferenzen auch eine andere Funktion zur Konstruktion des nichtlineare Filters wählen können. Daß das Filter auch für beliebige gerade, stetig differenzierbare, glockenförmige Funktionen h_z mit Werten in $I\!R^{\geq 0}$ an Stelle von ψ Kanten versteilert, sei hier nachgerechnet. Da diese Rechnung nicht so elegant ist, wird sie hier im Anhang durchgeführt.

Es gilt zunächst:

$$
\begin{array}{rlll}
\multicolumn{3}{l}{\frac{d}{dx} g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x))} & \\
= & - & g'(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) & (a) \\
 & - & g(t-x)\, h_z'(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) \cdot f'(x) & (b) \\
 & - & g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot f'(x) & (c) \\
= & - & g'(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) & (a) \\
 & - & g(t-x)\, h_z'(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) \cdot f'(t) & (ii) \\
 & - & g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot f'(t) & (i) \\
 & + & g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot f'(t) & (i) \\
 & - & g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot f'(x) & (c) \\
 & + & g(t-x)\, h_z'(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) \cdot f'(t) & (ii) \\
 & - & g(t-x)\, h_z'(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) \cdot f'(x) & (b) \\
= & - & \frac{d}{dt}\, g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) & (i),(a),(ii) \\
 & + & g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f'(t)-f'(x)) & (i),(c) \\
 & + & g(t-x)\, h_z'(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) \cdot (f'(t)-f'(x)) & (ii),(b) \\
= & - & \frac{d}{dt}\, g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) \cdot (f(t)-f(x)) & \\
 & + & (f'(t)-f'(x))\, g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) & \\
 & + & (f'(t)-f'(x))\, g(t-x)\, [(f(t)-f(x)) \cdot h_z'(f'(t)-f'(x))] &
\end{array}
$$

Man erhält durch integrieren:

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)-f(x))\, g(t-x)\, h_z(f(t)-f(x)) dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} (f'(t)-f'(x))\, g(t-x)\, [h_z(f(t)-f(x)) + (f(t)-f(x))\, h_z'(f(t)-f(x))] dt
\end{array}
$$

Da h_z glockenförmig und $f : I\!R \to [-1,1]$ ungerade und monoton wachsend ist, gilt für alle $t \in I\!R$: $f(t) h_z'(f(t)) \leq 0$.

Für $x = 0$ erhält man wegen $f(0) = 0$ die Formel:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(x))\ g(t-x)\ h_z(f(t) - f(x))dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(f'(t) - f'(0))}_{\leq 0}\ \ g(t)\ \ \left[\underbrace{h_z(f(t))}_{\geq 0} + \underbrace{f(t)h'_z(f(t))}_{\leq 0} \right] dt
\end{aligned}
$$

Analog zur Formel 20 auf Seite 47 ergibt sich ein Ausdruck für die Versteilerung der Rampe.

$$
[Gf]'(0) \quad = \quad f'(0) + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f'(t) - f'(0))\ \ g(t)\ \ [h_z(f(t)) + f(t)h'_z(f(t))]\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) h_z(f(t)) dt}
$$

Ersetzt man h_z in dieser Formel durch die Gauß-Funktion, so ergibt sich mit Hilfe der Gauß-Identitäten die Formel aus Beweis von Lemma 4.34.

Literatur

[BCM+88] L. Basano, B. Caprile, E. De Micheli, A. Geminiani, and P. Ottonello. Edge-detection schemes highly suitable for hardware implementation. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 5(7):1170–1175, 1988.

[Ber87] Frederik Bergholm. Edge focusing. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:726–741, 1987.

[BS79] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathmatik.* B. G. Teubner, Leibzig, 1979.

[BZ87] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual Reconstruction.* MIT Press, Cambridge (Massachusette), London (England), 1987.

[Can83] J. F. Canny. Finding edges and lines in images. Technical Report AI-TR-720, Massachusetts Institut of Technologie, 1983.

[Can86] J. F. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.

[Dau88] John G. Daugman. Pattern and motion vision without laplacian zero crossings. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 5(7):1142–1148, 1988.

[Dav87] E. R. Davis. Design of optimal gaussian operators in small neighbourhoods. *Image and Vision Computing*, 5(3):199–205, 1987.

[Fle92a] Margaret M. Fleck. Multiple width yield reliable finite differences. In *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 412–429, 1992.

[Fle92b] Margaret M. Fleck. Plus ca change, ...*. In *Proc. Second European Conference on Computer Vision*, pages 151–159, 1992.

[Hub81] Peter J. Huber. *Robust Statistics.* Wiley, New York, 1981.

[Jar90] Leonid P. Jaroslavskij. *Einführung in die digitale Bildverarbeitung.* Hürting Buch Verlag GmbH, Heidelberg, 1990.

[KDTN92] D. Koller, K. Daniilidis, T. Thorhallson, and H.-H. Nagel. Model-based object tracking in traffic scenes. In *Proc. Second European Conference on Computer Vision*, pages 437–452, 1992.

[Lee83] Jong-Sen Lee. Digital image smoothing and the sigma filter. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 24:255–269, 1983.

[LJ89] Yi Lu and Ramesh C. Jain. Behavior of edges in scale space. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(4):337–356, 1989.

[MH80] David Marr and E. Hilderth. Theory of edge detection. *Proc. R. Soc. Lond.*, B 207:187–217, 1980.

[NM79] Makoto Nagao and Takashi Matsuyama. Edge preserving smoothing. *Computer Graphics and Image Processing*, 9:394–407, 1979.

[PK91] Maria Petrou and Josef Kittler. Optimal edge detectors for ramp edges. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5):483–491, 1991.

[PM90a] Pietro Perona and Jitendra Malik. Detecting and localizing edges composed of steps, peaks and roofs. In *Proc. Third Int. Conf. of Computer Vision ICCV90*, pages 52–57, 1990.

[PM90b] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, 1990.

[SB91] S. Sarkar and K. L. Boyer. Optimal infinite impulse response zero crossing based edge detectors. *Image Understanding*, 54(2):224–243, 1991.

[SBA85] G. D. Sullivan, K. D. Baker, and J. A. D. W. Anderson. Use of multiple difference-of-gaussian filters to verify geometric models. *Image and Vision Computing*, 3(4):192–197, 1985.

[SMCM91] Phillipe Saint-Marc, Jer-Sen Chen, and Gerard Medioni. Adaptive smoothing: A general tool for early vision. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6):514–529, 1991.

[TP86] Vincent Torre and Tomaso A. Poggio. On edge detection. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(2):147–163, 1986.

[Tri80] Hans Triebel. *Höhere Analysis.* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2., verbesserte Auflage, 1980.

[WP93] Ross. T. Whitaker and Stephan M. Piter. A multi-scale approach to nonuniform diffusion. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 57(1):99–110, 1993.

[WVL81] David C. C. Wang, Anthony H. Vagnucci, and C. C. Li. Gradient inverse weighted smoothing scheme and the evaluation of its performance. *Computer Graphics and Image Processing*, 15:167–181, 1981.

[YP86] Alan L. Yuille and Tomaso Poggio. Scaling theorems for zero crossings. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1):15–25, 1986.

Index